

А. И. ЛУРЬЕ

ОПЕРАЦИОННОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ
И ЕГО ПРИЛОЖЕНИЯ
К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ

ВТОРОЕ
СОВЕРШЕННО
ПЕРЕРАБОТАННОЕ
ИЗДАНИЕ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

МОСКВА 1951 ЛЕНИНГРАД

Редактор *А. И. Чекмарев*

Техн. редактор *К. М. Волчок*

Подписано к печати 15/1 1951 г. Т-00821. Формат бумаги 84×108/32. Бум. л. 6,75
Печ. л. 22,14. Уч.-изд. л. 22,18. Тип. зн. в печ. л. 32 860. Тираж 10000 экз. (5001—10000).
Цена 13 р. 30 к. Переплет 2 р. Заказ № 2057.

4-я типография им. Евг. Соколовой Главполиграфиздата при Совете Министров СССР.
Ленинград, Измайловский пр., 29.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	11
Глава I. Основные определения и теоремы операционного исчисления	
§ 1. Начальная функция и изображение	15
§ 2. Основные свойства изображений	19
1°. Свойство линейности (19). 2°. Изменение масштаба независимой переменной (19). 3°. Изображение производной (20). 4°. Изображение интеграла (21). 5°. Теорема запаздывания (22). 6°. Теорема смещения (23). 7°. Теорема свёртывания (24). 8°. Дифференцирование изображения (26). 9°. Поведение изображения $F(p)$ при $ p \rightarrow \infty$ (28). Таблица I. Сводка основных правил и определений операционного исчисления (29).	
§ 3. Изображения некоторых простейших функций . . .	30
1°. Единичная функция Хевисайда (30). 2°. Изображение целой степени переменного (32). 3°. Изображение показательной функции (33). 4°. Изображение гиперболических функций (35). 5°. Изображение тригонометрических функций (35). 6°. Изображение $e^{at} \cos \omega t$, $e^{at} \sin \omega t$ (35). 7°. Функции $\operatorname{ch} t \cos t$, $\operatorname{ch} t \sin t$ и т. д. Функции А. Н. Крылова (37). 8°. Функции поперечных колебаний стержня (40).	
§ 4. Теоремы разложения	41
1°. Первая теорема (41). 2°. Вторая теорема разложения (45). 3°. Обобщение второй теоремы разложения (51). Таблица 2. Изображения некоторых функций (53).	
§ 5. Изображения некоторых кусочно-непрерывных функций. Изображение периодических функций	54
1°. Ступенчатый ход (55). 2°. Периодическая ступенчатая функция (56). 3°. Периодически повторяющиеся	

импульсы (56). 4°. „Равноскатная крыша“ (57). 5°. Изображение функции $f(t) = g(t)$ при $t_1 < t < t_2$ и обра-
щающейся в нуль вне этого промежутка (58). 6°. Изоб-
ражение графика трапеции. Частные случаи (таб-
лица 3) (60). 7°. Изображение одной полуволны синусо-
иды (63). 8°. Изображение периодической функции (63).
9°. Изображение выпрямленной синусоиды (66).
10°. „Пилообразная“ функция и другие примеры (67).
11°. Применение к разложению периодической функ-
ции в тригонометрический ряд (67).

§ 6. Импульсивные функции 70

1°. Единичная импульсивная функция $\sigma_1(t)$ (70).
2°. Единичная импульсивная функция второго по-
рядка (72).

**Глава II. Применение операционного исчисления к ре-
шению дифференциальных и разностных
уравнений**

§ 7. Интегрирование однородного линейного дифферен-
циального уравнения с постоянными коэффициентами 76

1°. Изображающее уравнение (76). 2°. Основная си-
стема решений и построение общего решения (77).
3°. Нулевой корень, замечание о кратных корнях (81).
4°. Пример (82).

§ 8. Интегрирование линейного неоднородного дифферен-
циального уравнения с постоянными коэффициен-
тами 84

1°. Переходный процесс при единичном возмущении
и переходный процесс под действием единичного
импульса (84). 2°. Решение при произвольной правой
части $f(t)$ (85). 3°. Оценка модуля отклонения динами-
ческой системы от равновесного состояния (87).
4°. Решение в форме определённого интеграла (90).
5°. Разыскание периодического решения при перио-
дической правой части (91). 6°. Особые случаи (93).
7°. Периодические решения, меняющие знак через
полупериод (95). 8°. Пример построения периодиче-
ского решения (97).

§ 9. Интегрирование однородной системы линейных диф-
ференциальных уравнений первого порядка с постоян-
ными коэффициентами 101

1°. Изображающая система (101). 2°. Основная си-
стема решений (102). 3°. Замечание о случае кратных
корней характеристического уравнения (106). 4°. При-
меры (108).

§ 10. Малые колебания материальной системы вокруг поло-
жения устойчивого равновесия 110

1°.	Дифференциальные уравнения малых колебаний консервативной системы (110).	
2°.	Рассмотрение кратных корней характеристического уравнения (111).	
3°.	Составление решения для случая простых корней (112).	
4°.	Замечание о форме решения при наличии кратных корней в случае системы с рассеянием энергии (113).	
§ 11.	Составление характеристического уравнения по методу А. Н. Крылова	115
1°.	Решение изображающей системы методом исключения неизвестных (115).	
2°.	Замечание о случае кратных корней (118). Пример (118).	
§ 12.	Интегралы от произведений решений	121
1°.	Постановка задачи и приведение её к вычислению сумм S (121).	
2°.	Произведения R и R_λ (124).	
3°.	Сведение задачи к вычислению некоторых симметрических функций коэффициентов полинома $\Delta(p)$. Случай полиномов третьей и четвертой степени (127).	
4°.	Доказательство обращения в нуль сумм S_{2k+1} (130).	
§ 13.	Интегрирование неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами	132
1°.	Решение для произвольных правых частей (132).	
2°.	Действие единичного импульса (133).	
3°.	Действие периодических возмущающих сил. Построение периодического решения в замкнутой форме (133).	
4°.	Условия существования и форма периодического решения в исключительных случаях (нулевой корень, пара чисто мнимых корней характеристического уравнения) (137).	
5°.	Случай периодических сил, меняющих знак через полупериод (139).	
6°.	Каноническая система уравнений теории автоматического регулирования (140).	
7°.	Вынужденные колебания консервативной динамической системы (143).	
§ 14.	Основные формулы операционного исчисления для ступенчатых функций	145
1°.	Теорема упреждения (147).	
2°.	Теорема запаздывания (148).	
3°.	Изображение $e^{\beta [x]} f[x]$ (148).	
4°.	Теорема свёртывания (148).	
5°.	Дифференцирование изображения (149).	
6°.	Изображение $[x]^n$ (149).	
7°.	Факториальная функция (149).	
8°.	Показательная функция (150).	
9°.	Аналог первой теоремы разложения (151).	
10°.	Вторая теорема разложения (151).	
15.	Решение линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами	153
1°.	Построение изображающего уравнения (153).	
2°.	Примеры (155).	

Глава III. Приложения операционного исчисления к задачам механики и сопротивления материалов

§ 16. Колебания простейшего вибратора 159

1°. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Графически заданный закон изменения силы (трапеция). Повторяющиеся импульсы противоположного направления. Общий случай периодической силы и условия возникновения периодического движения (159). 2°. Свободные колебания вибратора (163). 3°. Вынужденные колебания вибратора. Действие синусоидальной силы и случай резонанса (163). 4°. Движение вибратора под действием периодически повторяющихся импульсов. Разыскание периодического движения. Выделение свободных колебаний (164). 5°. Случай импульсов противоположного направления (167). 6°. Вынужденные колебания вибратора под действием выпрямленной синусоидальной силы. Выделение свободных колебаний (171). 7°. Общий случай какой угодно периодической силы. Выделение вынужденных и свободных колебаний (174).

§ 17. Движение вибратора при наличии силы сопротивления 178

1°. Свободные колебания (178). 2°. Вынужденные колебания. Случай синусоидальной возмущающей силы (179). 3°. Оценка модуля отклонения при произвольной ограниченной по модулю возмущающей силе (181). 4°. Свободные колебания вибратора при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости, и силы сухого трения (182). 5°. Вынужденные колебания под действием периодически прикладываемых импульсов. Исследование движения (185). 6°. Случай импульсов противоположного направления. Автоколебания в схеме маятника со спусковым механизмом (191). 7°. Действие на вибратор возмущающей силы, имеющей постоянную величину при движении вибратора „вперед“ и обращаясь в нуль при движении „назад“. Разыскание автоколебательного режима (194). 8°. Расчет качки корабля на неправильном волнении (198).

§ 18. Применение операционного исчисления к задачам об изгибе стержней 202

1°. Основные уравнения теории изгиба стержней. Изображение сосредоточенных сил и моментов (202). 2°. Примеры. Консольный стержень ступенчатого поперечного сечения. Опёртый по краям стержень

ступенчатого поперечного сечения. Консольный стержень с промежуточной опорой (204). 3°. Изгиб стержня, сжатого продольной силой (209). 4°. Изгиб балки, лежащей на сплошном упругом основании (211).

- § 19. Применение операционного исчисления к задаче изгиба тонкой плиты 214
- 1°. Симметрично нагруженная круглая плита (214). 2°. Несимметрично нагруженная круглая плита. Круглая плита с защемлённым краем под действием сосредоточенной силы (218). 3°. Пример расчёта кольцевой круглой плиты (224). 4°. Изгиб прямоугольной плиты, два параллельных края которой опёрты (226). 5°. Представление нагрузки в форме ряда по синусам. Случай нагрузки, распределённой по прямой (228). 6°. Бесконечная полоса, нагруженная сосредоточенной силой (23¹). 7°. Полоса, нагруженная бесконечным рядом сил (231).
- § 20. Деформация кругового кольца 234
- 1°. Плоская деформация кольца (234). 2°. Интегрирование уравнений равновесия (237). 3°. Интегрирование уравнений для перемещений (242). 4°. Неплоская деформация кругового кольца. Интегрирование уравнений равновесия (248). 5°. Интегрирование уравнений для перемещения и угла закручивания (250).
- § 21. Применение разностных уравнений к решению некоторых задач сопротивления материалов 254
- 1°. Задача Н. Е. Жуковского о распределении усилий на нарезках винта и гайки (254). 2°. Обобщённая задача Н. Е. Жуковского (261).

Глава IV. Механические системы с конечным числом степеней свободы

- § 22. Струна с сосредоточенными массами 268
- 1°. Задача Лагранжа о свободных колебаниях n масс, закреплённых на невесомой струне (268). 2°. Вынужденные колебания масс (274). 3°. Фильтр механических колебаний (277). 4°. Задача Н. Е. Жуковского о распространении натяжения в цепных пружинах при пуске поезда в ход (280).
- § 23. Крутильные колебания однородного двигателя с маховиком 286
- § 24. Продольное движение самолёта 295
- 1°. Свободные колебания самолёта при малом возмущении режима горизонтального прямолинейного

полёта (295). 2°. Вынужденные колебания (299). 3°. Периодический режим движения самолёта при действии на него периодических сил (302).

Глава V. Механические системы с бесконечным числом степеней свободы

- § 25. Колебания струны. Продольные колебания стержня. 305
 1°. Свободные колебания струны (305). 2°. Движение точечной массы, закреплённой на натянутой струне. Определение движения по последовательным этапам. Представление решения в форме ряда (313). 3°. Колебания струны под действием перемещающейся вдоль неё силы (317). 4°. Продольные колебания стержня с грузом на конце (320). 5°. Случай приложения к грузу периодически повторяющихся импульсов (322).
- § 26. Продольный удар цилиндров 324
 1°. Составление и решение изображающих уравнений (324). 2°. Пример одинаковых цилиндров (326). 3°. Второй пример: ударяющий цилиндр имеет вдвое большую длину (328).
- § 27. Продольный удар груза по балке 330
 1°. Решение изображающих уравнений (330). 2°. Нахождение усилия в месте удара. Выражение решения с помощью специальных полиномов, выражающихся через полиномы Лагерра (332). 3°. Определение перемещения (334). 4°. Продольное усилие в заделанном сечении (335). 5°. Стержень со свободными концами (336).
- § 28. Гидравлический удар в трубопроводе 336
 1°. Уравнения одномерного течения идеальной, слабо сжимаемой жидкости. Изображающие уравнения (336). 2°. Простейшая задача о гидравлическом ударе в трубопроводе (338). 3°. Гидравлический удар при наличии в выходном сечении пружинного клапана, регулирующего сток жидкости (340). 4°. Движение клапана в случае резкого изменения давления во входном сечении трубопровода (343). 5°. Периодическое изменение давления во входном сечении (345).

Глава VI. Общая формула обращения и её приложения

- § 29. Формула обращения 351
 1°. Формулировка задачи обращения и формула обращения (351). 2°. Вывод формулы обращения из интегральной формулы Фурье (352). 3°. Представление изображений в форме интеграла Лапласа как следствие определения начальной функции с помощью

формулы обращения (353). 4°. Независимость значения интеграла в формуле обращения от выбора постоянной σ (355). 5°. Обращение начальной функции в нуль при $t < 0$. Первая формулировка леммы Жордана (356). 6°. О необходимости проверки результата, получаемого по формуле обращения (358). 7°. Изменение пути интегрирования в формуле обращения. Вторая формулировка леммы Жордана (359).

§ 30. Изображение дробной степени и логарифма. Правило Хевисайда 361

1°. Изображение дробной степени (361). 2°. Частный случай: степень равна целому числу с половинной (363). 3°. Изображение логарифма (365). 4°. Правило Хевисайда (366). 5°. Начальная функция для $e^{-a\sqrt{p}}$. Интеграл вероятности (367). 6°. Некоторые другие изображения (368).

§ 31. Асимптотическое представление начальной функции 369

1°. Ограничение рассматриваемого класса изображений (369). 2°. Разложение в области особой точки (373). 3°. Случай точки разветвления ($r = 2$, $m = 0$) (374).

4°. Случай полюса (375). 5°. $F(p) = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{p}}}$. Асим-

птотическое представление интеграла вероятности.

$F(p) = \frac{p\sqrt{p}}{\omega^2 + p^2}$. Интегралы Френеля. Их асимптотическое представление (375). 6°. Асимптотическое представление функции Бесселя $J_0(t)$ (378).

§ 32. Изображение некоторых функций 379

1°. Определение начальной функции для изображения $F(\sqrt{p})$, когда известна начальная функция $f(t) \leftarrow F(p)$ (379). 2°. Та же задача для $F\left(\frac{1}{p}\right)$ (381).

3°. Преобразование А. М. Эфроса (382). 4°. Изображение бесселевой функции $J_n(t)$ (384). 5°. Начальная функция для изображения $\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} e^{-\tau\sqrt{p^2 + 1}}$

(386). 6°. Начальная функция для изображения

$\frac{p}{p^2 + 1} F(\sqrt{p^2 + 1})$ (388).

Глава VII. Различные приложения

- § 33. Приложение операционного исчисления к решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений 389
- 1°. Интегральное уравнение с переменным верхним пределом и с ядром, зависящим от разности аргументов (389). 2°. Обобщение на случай интегро-дифференциального уравнения (390). 3°. Задача Абеля (391). 4°. Применение к задачам наследственной теории упругости (391). 5°. Падение шара в вязкой жидкости при сопротивлении по закону Буссинеска (393). 6°. Маятниковые колебания шара в вязкой жидкости (396). 7°. Задача Н. Е. Жуковского о прочности велосипедного колеса (399).
- § 34. Поперечные колебания стержней 403
- 1°. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня (403). 2°. Колебания двухопорной балки при внезапном нагружении сосредоточенной силой (404). 3°. Действие внезапно прикладываемого изгибающего момента на балку неограниченной длины (409). 4°. Случай мгновенно прикладываемой силы (412). 5°. Поперечный удар груза по балке (414). 6°. Колебания бесконечной балки, лежащей на упругом основании (416).
- § 35. Поперечные колебания неограниченной круглой плиты 419
- 1°. Общее решение изображающего уравнения (419). 2°. Колебания неограниченной плиты под действием сосредоточенной силы (421). 3°. Начальные функции для изображений $K_0(2\sqrt{s})$, $\ker(2\sqrt{s})$, $\text{kei}(2\sqrt{s})$ (422). 4°. Частный случай мгновенно прикладываемой и остающейся постоянной силы (423). 5°. Неограниченная плита на упругом основании. Движение точки приложения силы. Действие синусоидальной силы. Интегралы Вебера (425). 6°. Нахождение начальной функции в любом месте. Случай синусоидальной силы. Вычисление некоторых интегралов, содержащих бесселевы функции (427).

Литература по операционному исчислению 432

ПРЕДИСЛОВИЕ

Первое издание этой книги, написанной в 1936 г., вышло в свет в 1938 г. Примерно в течение десяти лет она и книга А. М. Эфроса и А. М. Данилевского „Операционное исчисление и контурные интегралы“ служили основными руководствами на русском языке по операционному исчислению и, повидимому, в значительной мере способствовали популяризации в широких научно-технических кругах этого простого и могучего средства математического исследования прикладных вопросов. В последние два года на эту тему появилось несколько отечественных и переводных книг, в том числе превосходная книга М. И. Конторовича „Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях“.

В последние годы автор неоднократно читал курс операционного исчисления инженерам, работавшим в различных областях машиностроения и приборостроения и интересовавшимся главным образом вопросами исследования систем автоматического регулирования. В настоящем издании отражен этот опыт преподавания, а также личного участия автора в работе в указанной технической области.

Книга состоит из семи глав, содержание которых передано в подробном оглавлении. В первой главе даётся определение лапласова преобразования и вывод его основных свойств и приводятся изображения простейших функций (целой степени, показательной и тригонометрических функций). Во второй главе рассматривается задача интегрирования линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами и систем таких уравнений. Два параграфа этой главы посвящены приложению операционного исчисления к функциям целочисленного аргумента и разностным уравнениям. Третья, четвертая и пятая главы трактуют разнообразные приложения

и иллюстрируют многообразие и богатство технических задач, разрешимых с помощью указанного выше весьма ограниченного класса функций. Эти главы преследуют цель показать операционное исчисление в действии, приучить и привлечь читателя к практическому овладению этим методом и показать, что этого легко добьётся всякий, кто не поскупится затратить на это необходимое время. Интересно отметить, что на протяжении первых пяти глав вычислен лишь один интеграл:

$$p \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = 1.$$

Более сложный по математическому содержанию материал изложен в шестой и седьмой главах. От читателя этих глав требуется знакомство с основными положениями теории функций комплексного переменного и знание некоторых специальных функций. Ни объём, ни характер этой книги не позволили развить поставленные в этих главах задачи с большей полнотой. Здесь ставилась скорее цель дать читателю необходимую ориентировку в вопросе, чем приучить его к фактическому использованию этих более сложных средств операционного исчисления.

Настоящее второе издание является по существу новой книгой. Многое из того, что было в первом издании, здесь исключено, но зато добавлен ряд новых параграфов. Наиболее важное дополнение представляет изложение метода построения в замкнутом виде периодических решений дифференциальных уравнений и многочисленных приложений этого метода. Из других добавлений укажем на упомянутые выше задачи, относящиеся к разностным уравнениям, на задачу о вычислении интегралов от квадратов решений системы линейных уравнений и на ряд новых задач теории колебаний и сопротивления материалов. По существу, вся книга написана заново: от текста первого издания не осталось ни одного параграфа, который не был бы целиком переработан.

Во всём изложении строго проводится точка зрения на операционное исчисление как на средство обращения операций анализа в области начальных функций в алгебраические операции в области изображения этих функций. Слово „оператор“ в тексте книги употребляется в осторожной форме; автор

стремился всеми средствами привить читателю взгляд, что p — это такое же число, как и всякое другое; последовательное проведение этой точки зрения представляется весьма важным, так как во многих работах она часто не подчеркивается с достаточной определённой, от чего происходят многие недоразумения, а иногда и прямые ошибки.

Книга написана инженером для инженеров. Поэтому автор старался не выходить за ту грань, за которой математическая полнота и строгость доказательств становятся обременительными для читателя и теряется преимущество простоты и доступности метода. Вместе с тем, там, где это нужно, указывается, что данный вопрос нуждается в математическом уточнении и дается источник, из которого читатель может получить необходимые дополнительные разъяснения.

Первая цифра нумерации формул указывает номер главы. При ссылке на формулу данной главы номер главы не указывается. Номер указывается полностью при ссылке на формулу предшествующей главы.

Автор приносит искреннюю благодарность Г. Ю. Джанелидзе за ряд сделанных им ценных замечаний.

Автор

Ленинград
декабрь 1949 г.

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ОПРЕДЕЛЕНИЯ И ТЕОРЕМЫ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ

§ 1. Начальная функция и изображение

Под операционным исчислением понимается совокупность методов прикладного математического анализа, позволяющих наиболее простыми, экономными и непосредственно ведущими к цели средствами получать решения линейных дифференциальных уравнений (обыкновенных и с частными производными), а также разностных, дифференциально-разностных и некоторых типов интегральных уравнений. Известно, что именно эти задачи наиболее часто возникают в самых разнообразных технических вопросах.

Построение операционного исчисления в настоящее время базируется на идее функционального преобразования: рассматриваются функции вещественного переменного t , определённые при положительных значениях аргумента; этим „*начальным функциям*“, или „*оригиналам*“, с помощью линейного интегрального преобразования сопоставляют функции другого переменного p , называемые „*изображениями*“. Оказывается, что указанное преобразование „оригинал—изображение“ можно осуществить так, чтобы операциям дифференцирования и интегрирования начальных функций соответствовали алгебраические операции в области изображений. Это позволяет находить с помощью простейших алгебраических действий изображения решений предложенных дифференциальных уравнений (или аналогичных задач); остающаяся часть задачи — разыскание соответствующей начальной функции, т. е. самого решения, может быть во многих случаях непосредственно доведена до конца с помощью „каталога“ изображений

наиболее часто встречающихся функций и некоторых простых правил. В более сложных задачах приходится прибегнуть к обратному функциональному преобразованию „изображение — оригинал“.

Имея в виду прикладную цель этой книги и не желая затруднять изложение более общими предположениями, мы ограничим класс рассматриваемых начальных функций *кусочно-непрерывными функциями* $f(t)$ вещественной переменной t , определёнными при $t > 0$ и принимаемыми равными нулю при $t < 0$.

Напомним, что кусочно-непрерывной функцией $f(t)$ называется однозначная функция, имеющая в любом конечном интервале $(0, T)$ конечное число разрывов непрерывности первого рода в точках $t_1, t_2, \dots, t_n$. В каждом из интервалов (t_{i-1}, t_i) функция $f(t)$ — непрерывна; она стремится к конечному пределу при приближении изнутри интервала к его границе (рис. 1).

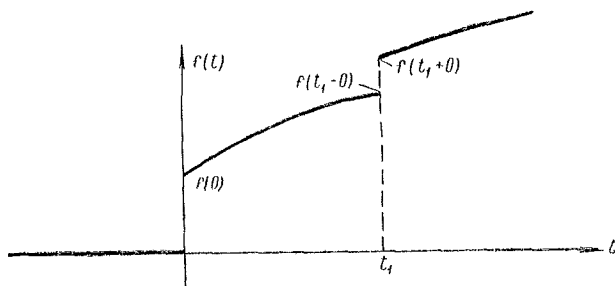


Рис. 1. Кусочно-непрерывная начальная функция.

Из этого определения следует, что если $t = t_i$ представляет точку разрыва первого рода, то $f(t_i - 0)$ и $f(t_i + 0)$ не равны друг другу и разность этих чисел $f(t_i + 0) - f(t_i - 0)$ представляет скачок $f(t)$ при $t = t_i$. Заметим, что $f(0)$ в дальнейшем обозначает $f(+0) = \lim_{t \rightarrow +0} f(t)$ и что по определению $f(-0) = 0$.

Из класса кусочно-непрерывных начальных функций выделяется и в дальнейшем рассматривается подкласс функций, характеризуемых *определённым порядком роста* при весьма больших значениях аргумента t . Предполагается, что можно

указать такие, независимые от t числа M и s_0 , что каково бы ни было t

$$|f(t)| < M e^{s_0 t}, \quad (1.1)$$

т. е. что при любом $t > 0$ модуль $f(t)$ растёт медленнее, чем некоторая экспоненциальная функция.

Пусть далее $p = s + i\sigma$ — некоторое комплексное число. При указанных ограничениях, накладываемых на функцию $f(t)$, интеграл

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \quad (1.2)$$

существует и представляет функцию от p , называемую *лапласовым интегралом* функции $f(t)$; его обозначают обычно через

$$L\{f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.3)$$

Можно доказать, что лапласов интеграл является регулярной функцией от p в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$.¹ Иными словами, эта функция имеет производные всех порядков в указанной области и все её особенности расположены в комплексной плоскости p слева от прямой $\operatorname{Re} p = s_0$.

По причине, которая станет ясной ниже, предпочтительнее вместо лапласова интеграла рассматривать функцию

$$F(p) = pL\{f(t)\}. \quad (1.4)$$

Итак,

$$\frac{F(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (1.5)$$

Функцию $F(p)$ мы в дальнейшем будем называть *изображением начальной функции, или оригинала* $f(t)$. При этом во всём последующем изложении условимся обозначать начальные функции малыми буквами латинского или греческого алфавита, а их изображения — соответствующими прописными буквами.

¹ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, IV, § 69, 1941.

Для обозначения того обстоятельства, что $F(p)$ служит изображением $f(t)$, будем применять символ

$$F(p) \dashrightarrow f(t). \quad (1.6)$$

Точно так же запись

$$f(t) \dashleftarrow F(p) \quad (1.7)$$

будет обозначать, что $f(t)$ служит начальной функцией для изображения $F(p)$. Острые стрелки направлены к оригиналу.

Из сказанного следует, что отнюдь не всякая функция $F(p)$ является изображением некоторой начальной функции. Например, не существует начальной функции, имеющей изображение $F(p) = \lg p$, так как полюсы тангенса расположены на всей вещественной оси, а не слева от некоторой прямой, параллельной мнимой оси комплексной плоскости $p = s + it$. Но можно доказать, что если $F(p)$ является изображением, то соответствующая начальная функция является единственной в некотором смысле. Именно: две кусочно-непрерывных функции $f_1(t)$ и $f_2(t)$, имеющие одинаковые изображения, могут отличаться лишь в точках разрыва непрерывности; иными словами, если $F(p)$ является изображением некоторой непрерывной функции $f(t)$, то последняя определяется единственным образом.¹

Класс начальных функций, указанный выше, охватывает кусочно-непрерывные функции, растущие при $t \rightarrow \infty$ не быстрее, чем некоторая экспоненциальная функция. Поэтому разрывная функция $f(t) = \frac{1}{t}$, функция $f(t) = e^{t^2}$ и т. д. не могут рассматриваться как начальные функции — для них соответствующие интегралы Лапласа не имеют смысла. Вместе с тем ограничение рассматриваемых начальных функций указанным классом не является необходимым, так как, например, для не принадлежащей к нему функции $f(t) = \frac{1}{\sqrt{t}}$ (или более общо: $f(t) = t^k$, $-1 < k < 0$) интеграл Лапласа сходится, и изображение этой функции существует.

¹ L e r c h, Sur un point de la théorie des fonctions génératrices. Acta mathematica, 27, 1903, стр. 339. См. также Х. К а р с л о у и Д. Е г е р, Операционные методы в прикладной математике, Гостехиздат, 1948, стр. 266—268.

В заключение отметим, что в последующем $f(t)$ иногда будет представлять комплексную функцию вещественного переменного t : $f(t) = f_1(t) + if_2(t)$, где $f_1(t)$, $f_2(t)$ — кусочно-непрерывные функции с указанным выше порядком роста при $t \rightarrow \infty$.

§ 2. Основные свойства изображений

1°. Свойство линейности. Из определения изображения, даваемого формулой (5), непосредственно следует, что изображение суммы конечного числа начальных функций равно сумме их изображений, т. е. если

$$f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t) \quad (1.8)$$

и

$$f_i(t) \leftarrow \div F_i(p), \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad f(t) \leftarrow \div F(p),$$

то

$$F(p) = \sum_{i=1}^n F_i(p). \quad (1.9)$$

Доказательство очевидно.

2°. Изменение масштаба независимой переменной. Пусть $\alpha > 0$ и пусть известно изображение $F(p)$ начальной функции $f(t)$. Найдём изображение $f(\alpha t)$. Имеем:

$$L\{f(\alpha t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\alpha t) dt = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} \alpha t} f(\alpha t) d(\alpha t).$$

Вводим новую переменную интегрирования $\alpha t = t'$; так как $\alpha > 0$, то пределы интегрирования по t' будут снова 0, ∞ . Получаем

$$L\{f(\alpha t)\} = \frac{1}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} t'} f(t') dt',$$

и, значит, по (4) изображение функции $f(\alpha t)$ будет:

$$f(\alpha t) \leftarrow \div \frac{p}{\alpha} \int_0^{\infty} e^{-\frac{p}{\alpha} t'} f(t') dt,$$

так как, конечно, переменную интегрирования можно снова обозначить буквой t . Далее, по (5) имеем:

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

Заменяя здесь букву p на $\frac{p}{\alpha}$, получаем

$$F\left(\frac{p}{\alpha}\right) \longleftrightarrow f(\alpha t). \quad (1.10)$$

3°. Изображение производной $f(t)$. Имеем:

$$L\{f'(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f'(t) dt,$$

откуда, интегрируя по частям, получаем

$$L\{f'(t)\} = e^{-pt} f(t) \Big|_0^{\infty} + p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt.$$

При условии (1) и при $\operatorname{Re} p > s_0$

$$\lim_{t \rightarrow \infty} e^{-pt} f(t) = 0$$

и приведенное выражение даёт:

$$L\{f'(t)\} = pL\{f(t)\} - f(0).$$

Вспомня зависимость (4) между лапласовым интегралом и изображением, находим важнейшее соотношение операционного исчисления:

$$f'(t) \longleftrightarrow p[F(p) - f(0)]. \quad (1.11)$$

Если, в частности, $f(0) = 0$, то

$$f'(t) \longleftrightarrow pF(p),$$

т. е. дифференцированию начальной функции соответствует умножение изображения на число p .

Обозначим для краткости правую часть (11) через $F_*(p)$, т. е.

$$F_*(p) = p[F(p) - f(0)].$$

Снова применив (11), получаем:

$$f''(t) \leftarrow \div p[F_*(p) - f'(0)].$$

Заменив $F_*(p)$ его значением, находим:

$$f''(t) \leftarrow \div p^2 \left[F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} \right]. \quad (1.12)$$

Продолжив это рассуждение, получим для любого целого n :

$$f^{(n)}(t) \leftarrow \div p^n \left[F(p) - f(0) - \frac{f'(0)}{p} - \dots - \frac{f^{(n-1)}(0)}{p^{n-1}} \right] \quad (1.13)$$

и, в частности, при

$$f(0) = f'(0) = \dots = f^{(n-1)}(0) = 0, \quad (1.14)$$

$$f^{(n)}(t) \leftarrow \div p^n F(p). \quad (1.15)$$

4°. Изображение интеграла. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = \int_0^t f(t) dt \leftarrow \div \Psi(p).$$

По определению имеем:

$$\psi'(t) = f(t), \quad \psi(0) = 0$$

и, значит, на основании (11):

$$F(p) = p\Psi(p), \quad \text{т. е.} \quad \Psi(p) = \frac{F(p)}{p}.$$

Мы получаем, таким образом, соотношение:

$$\int_0^t f(t) dt \leftarrow \div \frac{F(p)}{p}. \quad (1.16)$$

Последовательно применяя это соотношение, найдём:

$$\int_0^t dt_2 \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 \leftarrow \div \frac{F(p)}{p^2},$$

и для любого целого n :

$$\int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 \leftarrow \frac{1}{p^n} F(p). \quad (1.17)$$

Выражения для изображения производной и интеграла имеют основное значение в операционном исчислении: действиям анализа — дифференцированию и интегрированию над начальными функциями — соответствуют алгебраические действия — умножение и деление на целые степени числа p в области изображений. Само число p приобретает, таким образом, характер оператора.

5°. Теорема запаздывания. Смысл этой теоремы заключается в следующем: пусть функция $f(t)$, равная нулю при $t < 0$, определяет течение во времени некоторого процесса; рассмотрим функцию

$$f_\tau(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ f(t-\tau) & \text{„ } t > \tau \end{cases} \quad (1.18)$$

(где $\tau > 0$), определяющую течение того же процесса, но протекающего с запаздыванием на время τ (рис. 2). Зная

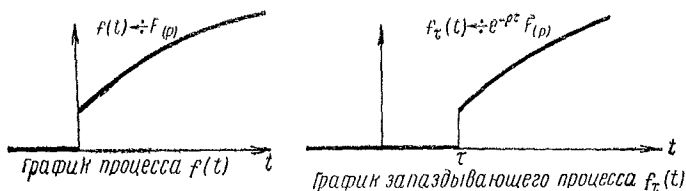


Рис. 2.

изображение $F(p)$ функции $f(t)$, найдём изображение $F_\tau(p)$ функции $f_\tau(t)$. Имеем по (5):

$$\begin{aligned} F_\tau(p) &= p \int_0^\infty f_\tau(t) e^{-pt} dt = \\ &= p \left[\int_0^\tau f_\tau(t) e^{-pt} dt + \int_\tau^\infty f_\tau(t) e^{-pt} dt \right], \end{aligned}$$

или по (18):

$$F_{\tau}(p) = p \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f(t - \tau) dt.$$

Вводя новую переменную интегрирования $t' = t - \tau$ и замечая, что пределы интегрирования по ней будут 0 и ∞ , получим:

$$F_{\tau}(p) = p \int_0^{\infty} e^{-p(t' + \tau)} f(t') dt' = pe^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt$$

и, следовательно, по (5):

$$F_{\tau}(p) = e^{-p\tau} F(p).$$

Итак, вспоминая (18), получаем:

$$e^{-p\tau} F(p) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ f(t - \tau) & \text{„ } t > \tau. \end{cases} \quad (1.19)$$

6°. Теорема сдвига. Эта теорема даёт возможность найти начальную функцию для изображения $F(p + \lambda)$ в предположении, что известна начальная функция $f(t) \leftarrow F(p)$. Заменяем в основном соотношении (5) p на $p + \lambda$:

$$\frac{F(p + \lambda)}{p + \lambda} = \int_0^{\infty} e^{-(p + \lambda)t} f(t) dt.$$

Переписывая это в форме

$$\frac{p}{p + \lambda} F(p + \lambda) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} e^{-\lambda t} f(t) dt,$$

закключаем на основании (5), что

$$\frac{p}{p + \lambda} F(p + \lambda) \rightarrow e^{-\lambda t} f(t). \quad (1.20)$$

Здесь предположено, что

$$\operatorname{Re} p > s_0 - \operatorname{Re} \lambda,$$

где s_0 определено по (1). Формула (20) будет многократно использована в дальнейшем. Переходя к выводу теоремы смещения, заметим теперь, что из (20) и (16) следует:

$$\frac{F(p+\lambda)}{p+\lambda} \dashrightarrow \int_0^t e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

Используя теперь очевидное тождество

$$F(p+\lambda) = \frac{p}{p+\lambda} F(p+\lambda) + \frac{\lambda}{p+\lambda} F(p+\lambda),$$

получаем:

$$F(p+\lambda) \dashrightarrow e^{-\lambda t} f(t) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda t} f(t) dt. \quad (1.21)$$

7°. Теорема свёртывания. *Складкой* двух начальных функций $f_1(t)$ и $f_2(t)$ называется функция

$$f(t) = \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau. \quad (1.22)$$

Операция получения складки называется *свёртыванием* функций.¹ Вводя вместо τ новую переменную интегрирования $\tau_1 = t - \tau$, можем написать также

$$f(t) = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau.$$

Здесь мы снова вместо τ_1 обозначили переменную интегрирования через τ .

Докажем теперь теорему: если

$$f_1(t) \dashleftarrow F_1(p) \quad \text{и} \quad f_2(t) \dashleftarrow F_2(p),$$

то складка этих функций имеет изображение

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p).$$

¹ В. И. Смирнов, Курс высшей математики, IV, § 70, 1941.

Для доказательства напомним формулу перемены порядка интегрирования в двойном интеграле:¹

$$\int_0^a dx \int_0^x f(x, y) dy = \int_0^a dy \int_y^a f(x, y) dx, \quad (1.23)$$

справедливость которой непосредственно следует из рис. 3: областью интегрирования служит равнобедренный прямоугольный треугольник, причём в одном случае (интеграл

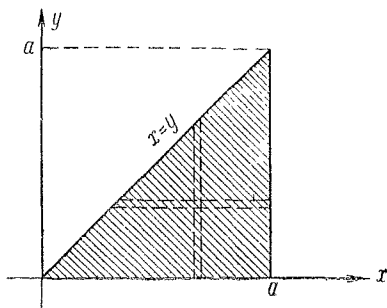


Рис. 3. К выводу формулы перемены порядка интегрирования.

в левой части равенства) интегрирование сначала производится по полоскам, вытянутым вдоль оси y , а потом — по всем подобным площадкам; во втором случае (интеграл справа) первое интегрирование производится по полоскам вдоль оси x .

В нашем случае имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} F(p) &= \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau. \end{aligned}$$

¹ Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, III, 1949, стр. 193.

Применим (23). Здесь $a = \infty$, $x = t$, $y = \tau$, $f(x, y) = e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t - \tau)$. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} F(p) &= \int_0^{\infty} d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_1(\tau) f_2(t - \tau) dt = \\ &= \int_0^{\infty} f_1(\tau) d\tau \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt. \end{aligned}$$

Преобразуем интеграл $\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt$ введением новой переменной $t_1 = t - \tau$. Получим:

$$\int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} f_2(t - \tau) dt = e^{-p\tau} \int_0^{\infty} e^{-pt_1} f_2(t_1) dt_1 = e^{-p\tau} \frac{F_2(p)}{p},$$

и, следовательно:

$$\frac{F(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f_1(\tau) d\tau \frac{F_2(p)}{p} = \frac{F_1(p) F_2(p)}{p^2}.$$

Итак, получаем:

$$\int_0^t f_1(\tau) f_2(t - \tau) d\tau \leftarrow \div \frac{1}{p} F_1(p) F_2(p). \quad (1.24)$$

Это весьма важное соотношение определяет начальную функцию для произведения изображений через начальные функции сомножителей.

8°. Дифференцирование изображения. Для начальных функций $f(t)$ рассматриваемого класса, т. е. кусочно-непрерывных и удовлетворяющих условию (1), лапласов интеграл сходится равномерно относительно p , если $\operatorname{Re} p > s_0$. Действительно:

$$|L\{f(t)\}| = \left| \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt \right| \leq \int_0^{\infty} e^{-st} |f(t)| dt,$$

так как

$$|e^{-pt}| = |e^{-(\sigma + i\tau)t}| = e^{-\sigma t}.$$

Используя (1), получаем:

$$|L\{f(t)\}| < M \int_0^{\infty} e^{-(s-s_0)t} dt = \frac{M}{s-s_0} < \frac{M}{s_1-s_0}, \quad (1.25)$$

где $s_1 > s_0$.

Полученная оценка доказывает сходимость лапласова интеграла; эта сходимость — равномерная, так как оценка остаётся справедливой, каково бы ни было p , взятое в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq s_1$.

Заметим теперь, что при $t \rightarrow \infty$ по (1) имеем:

$$|t^n f(t)| < t^n M e^{\nu_0 t} = M t^n e^{-\alpha t} e^{(\nu_0 + \alpha)t},$$

где α — произвольное положительное число. Обозначим через M_n максимум функции $M t^n e^{-\alpha t}$. Получаем:

$$|t^n f(t)| < M_n e^{(s_0 + \alpha)t},$$

т. е. $t^n f(t)$ также принадлежит к рассматриваемому классу начальных функций. Значит её лапласов интеграл

$$L\{t^n f(t)\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} t^n f(t) dt$$

также сходится равномерно относительно p к области $\operatorname{Re} p > s_0 + \alpha$ или, что то же самое, в области $\operatorname{Re} p > s_0$, так как α можно взять произвольно малым.

Замечая теперь, что под знаком интеграла в выражении

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} (-t)^n f(t) dt$$

стоит производная n -го порядка по букве p от $e^{-pt} f(t)$:

$$\frac{d^n}{dp^n} (e^{-pt} f(t)) = (-1)^n t^n f(t) e^{-pt},$$

можем на основании известной теоремы о дифференцировании определённого интеграла по параметру¹ написать:

$$L\{t^n f(t)\} = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = (-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{F(p)}{p} \right]$$

или

$$t^n f(t) \leftrightarrow (-1)^n p \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{F(p)}{p} \right] \quad (n=1, 2, \dots) \quad (1.26)$$

9°. Так как для изображений рассматриваемого класса начальных функций имеет место оценка (25), то:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} L\{f(t)\} = \lim_{p \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0. \quad (1.27)$$

Запись $p \rightarrow \infty$ здесь и в последующем надо понимать в том смысле, что $|p| \rightarrow \infty$, тогда как $-\frac{\pi}{2} < \text{Arg } p < \frac{\pi}{2}$, т. е., что p , неограниченно возрастаая по модулю, остается в правой полуплоскости.

Предположим теперь, что n -ая производная $f^{(n)}(t)$ является кусочно-непрерывной функцией, возрастающей при $t \rightarrow \infty$ не быстрее, чем некоторая экспоненциальная функция. Тогда соотношение (27) будет иметь место для изображения производной $f^{(n)}(t)$. Заменяя поэтому в (27) изображение $F(p)$ его выражением (13), получим:

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^{n-1} \left[F(p) - f(0) - \frac{1}{p} f'(0) - \dots - \frac{1}{p^{n-1}} f^{(n-1)}(0) \right] = 0. \quad (1.28)$$

В частности, при $n=1$, т. е. если производная $f'(t)$ принадлежит к рассматриваемому классу начальных функций, имеем:

$$F(\infty) = \lim_{p \rightarrow \infty} F(p) = f(0). \quad (1.29)$$

Этим мы заканчиваем перечисление основных свойств изображений. Поскольку в последующем на них будут делаться постоянные ссылки, полезно свести все сказанное выше в одну таблицу.

¹ Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, II, 1948, стр. 730.

Таблица 1

Сводка основных правил и определений операционного исчисления

I. Основное соотношение между изображением и начальной функцией:

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt, \quad f(t) \leftarrow \div F(p).$$

II. Если

$$f_i(t) \leftarrow \div F_i(p) \quad \text{и} \quad f(t) = \sum_{i=1}^n f_i(t),$$

то

$$f(t) \leftarrow \div \sum_{i=1}^n F_i(p) = F(p).$$

III. Изменение масштаба аргумента начальной функции:

$$f(\alpha t) \leftarrow \div F\left(\frac{p}{\alpha}\right), \quad \alpha > 0.$$

IV. Изображение производной:

$$f^{(n)}(t) \leftarrow \div p^n \left[F(p) - f(0) - \frac{1}{p} f'(0) - \dots - \frac{1}{p^{n-1}} f^{(n-1)}(0) \right].$$

V. Изображение интеграла:

$$\int_0^t f(t) dt \leftarrow \div \frac{1}{p} F(p).$$

VI. Теорема запаздывания для $\tau > 0$:

$$e^{-p\tau} F(p) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau \\ f(t - \tau) & \text{„ } t > \tau. \end{cases}$$

VII. Теорема смещения:

$$F(p + \lambda) \rightarrow e^{-\lambda t} f(t) + \lambda \int_0^t e^{-\lambda t} f(t) dt.$$

VIII. Умножение начальной функции на экспоненциальную функцию:

$$e^{-\lambda t} f(t) \leftarrow \div \frac{p}{p + \lambda} F(p + \lambda).$$

IX. Умножение начальной функции на целую степень t :

$$t^n f(t) \leftarrow \div (-1)^n p \frac{d^n}{dp^n} \left[\frac{F(p)}{p} \right].$$

X. Теорема свёртывания:

$$\frac{1}{p} F_1(p) F_2(p) \leftarrow \div \int_0^t f_1(\tau) f_2(t-\tau) d\tau = \int_0^t f_1(t-\tau) f_2(\tau) d\tau.$$

XI. Поведение изображения, когда $|p| \rightarrow \infty$ и

$$-\frac{\pi}{2} < \text{Arg } p < \frac{\pi}{2} :$$

$$\lim_{p \rightarrow \infty} p^{n-1} \left[F(p) - f(0) - \frac{1}{p} f'(0) - \dots - \frac{1}{p^{n-1}} f^{(n-1)}(0) \right] = 0,$$

причём $f^{(n)}(t)$ — кусочно-непрерывная функция, допускающая при $t \rightarrow \infty$ экспоненциальную оценку

$$|f^{(n)}(t)| < M e^{\alpha_0 t};$$

в частности, при $n=1$ получается:

$$F(\infty) = f(0).$$

§ 3. Изображения некоторых простейших функций

1°. Единичная функция Хевисайда. Так называют в операционном исчислении функцию от t , равную нулю при $t < 0$ и равную единице при $t > 0$ (рис. 4); её обозначают через $\sigma_0(t)$:

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{„ } t > 0. \end{cases} \quad (1.30)$$

Изображение находим непосредственным вычислением:

$$\Sigma_0(p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} \sigma_0(t) dt = p \int_0^{\infty} e^{-pt} dt = -e^{-pt} \Big|_0^{\infty}$$

и, значит, при $\text{Re } p > 0$:

$$\sigma_0(t) \leftarrow \div 1. \quad (1.31)$$

Из соотношения, выраженного этой формулой, тотчас же следует, что любая постоянная C является изображением этой

же постоянной; но надо иметь в виду, что „константа“ — начальная функция — должна фактически рассматриваться как функция от t , обращающаяся в нуль при $t < 0$ и равная C при $t > 0$. Точно так же, говоря ниже об изображении степени t^n , показательной функции e^{at} и т. п., мы фактически

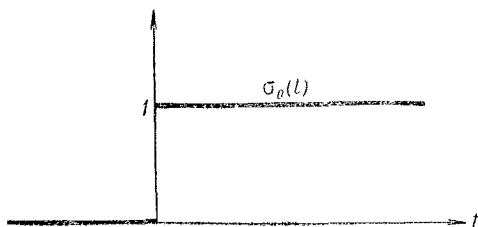


Рис. 4. График единичной функции $\sigma_0(t)$.

строим изображения функций, равных нулю при $t < 0$ и равных t^n , e^{at} и т. п. при $t > 0$, т. е. функций $\sigma_0(t)t^n$, $\sigma_0(t)e^{at}$ и т. п. Поэтому приводимые ниже формулы, дающие соот-

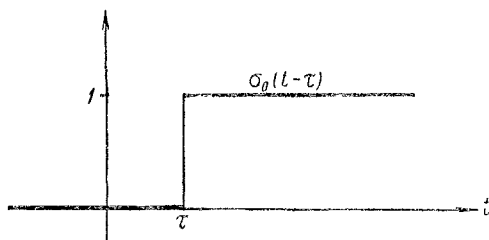


Рис. 5. График запаздывающей единичной функции $\sigma_0(t - \tau)$.

ветствия изображений и начальных функций, нужно было бы писать не в форме $F(p) \rightarrow f(t)$, а в форме $F(p) \rightarrow \sigma_0(t)f(t)$, но, чтобы не усложнять дела, мы будем придерживаться первой записи, постоянно помня, что $f(t) = 0$ при $t < 0$.

Обобщим определение единичной функции следующим образом: рассматривается функция от t , равная нулю при $t < \tau$ (где $\tau > 0$) и равная единице при $t > \tau$ (рис. 5). Эту

функцию обозначаем $\sigma_0(t - \tau)$. На основании (31) и теоремы запаздывания (VI табл. 1) получаем:

$$\sigma_0(t - \tau) \leftarrow \div e^{-p\tau}. \quad (1.32)$$

Для вывода формулы (31) мы прибегли к непосредственному вычислению (правда, совершенно элементарному) лапласова интеграла. В последующем вывод формул, дающих изображения наиболее простых и важных для приложений функций, основывается на общих свойствах изображений, представленных в табл. 1, и не требует вычисления интегралов.

2°. Изображение целой степени переменного t . Основываемся на свойстве IX (табл. 1); полагаем $f(t) = \sigma_0(t)$. Получаем:

$$t^n \sigma_0(t) \leftarrow \div (-1)^n p \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p} \right),$$

или, вспоминая сформулированное выше условие записи формул:

$$t^n \leftarrow \div \frac{n!}{p^n}.$$

Итак, при целом положительном n

$$\frac{t^n}{n!} \leftarrow \div \frac{1}{p^n} \quad (n = 0, 1, 2, \dots) \quad (1.33)$$

В частности, при $n = 0$ получаем:

$$1 \rightarrow \div 1$$

(точнее, $1 \rightarrow \div \sigma_0(t)$, как указывалось уже выше). Это объясняет, почему изображением $F(p)$ функции $f(t)$ мы называем не лапласов интеграл $L\{f(t)\}$, а произведение $pL\{f(t)\}$; при таком определении константе — начальной функции — соответствует та же константа — изображение (с приведённой выше оговоркой).

Как пример применения (33) рассмотрим изображение

$$\frac{1}{p^n} F(p) = \frac{1}{p} F(p) \frac{1}{p^{n-1}}$$

и используем теорему свёртывания (X); получаем

$$\frac{F(p)}{p^n} \leftarrow \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t f(\tau) (t-\tau)^{n-1} d\tau. \quad (1.34)$$

Отсюда по (17) находим известное выражение для повторного интеграла:

$$\begin{aligned} \int_0^t dt_n \int_0^{t_n} dt_{n-1} \dots \int_0^{t_2} f(t_1) dt_1 &= \\ &= \frac{1}{(n-1)!} \int_0^t (t-\tau)^{n-1} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (1.35)$$

3°. Изображение показательной функции. Примем $f(t) = 1$ и используем свойство VIII табл. 1; тогда

$$e^{-\lambda t} \leftarrow \frac{p}{p + \lambda} \quad (1.36)$$

или

$$e^{\alpha t} \leftarrow \frac{p}{p - \alpha}. \quad (1.37)$$

По свойству IX далее получаем:

$$t^n e^{\alpha t} \leftarrow (-1)^n p \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p - \alpha} \right).$$

Замечая, что

$$(-1)^n \frac{d^n}{dp^n} \left(\frac{1}{p - \alpha} \right) = \frac{n!}{(p - \alpha)^{n+1}},$$

находим

$$\frac{t^n}{n!} e^{\alpha t} \leftarrow \frac{p}{(p - \alpha)^{n+1}}. \quad (1.38)$$

К этой же формуле еще проще прийти непосредственно, используя свойство VIII табл. 1. Действительно, в данном случае $f(t) = \frac{t^n}{n!}$ и, следовательно, по (33)

$$F(p + \lambda) = \frac{1}{(p + \lambda)^n},$$

т. е.

$$\frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t} \leftarrow \frac{p}{(p + \lambda)^{n+1}}. \quad (1.39)$$

В качестве примера найдём еще начальную функцию для изображения

$$F(p) = \left(\frac{p}{p+\lambda} \right)^{n+1} = p^n \frac{p}{(p+\lambda)^{n+1}}.$$

Начальная функция $\frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t}$ для изображения $\frac{p}{(p+\lambda)^{n+1}}$ при $t=0$ обращается в нуль вместе со своими производными до $(n-1)$ -го порядка включительно. Поэтому на основании IV табл. 1:

$$p^n \frac{p}{(p+\lambda)^{n+1}} = \frac{p^{n+1}}{(p+\lambda)^{n+1}} \rightarrow \frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n!} \right).$$

Функция $\frac{d^n}{dt^n} \left(e^{-\lambda t} \frac{t^n}{n!} \right)$ может быть представлена в форме произведения $e^{-\lambda t}$ на некоторый полином n -ой степени от t — так называемый полином Лагерра, обозначаемый $l_n(\lambda t)$. Итак,

$$\left(\frac{p}{p+\lambda} \right)^{n+1} \rightarrow e^{-\lambda t} l_n(\lambda t).$$

Нетрудно составить $l_n(\lambda t)$ для $n=1, 2, 3 \dots$; его общее выражение будет

$$l_n(\lambda t) = \sum_{\nu=0}^n (-1)^\nu C_n^\nu \frac{(\lambda t)^\nu}{\nu!},$$

где C_n^ν — биномиальные коэффициенты,

Чтобы найти изображение $l_n(\lambda t)$, воспользуемся свойством VIII табл. 1. Имеем

$$e^{-\lambda t} l_n(\lambda t) \leftarrow \frac{p}{p+\lambda} L_n(p+\lambda),$$

где $L_n(p)$ — искомое изображение. Итак,

$$\frac{p}{p+\lambda} L_n(p+\lambda) = \left(\frac{p}{p+\lambda} \right)^{n+1}, \text{ т. е. } L_n(p+\lambda) = \left(\frac{p}{p+\lambda} \right)^n,$$

и окончательно:

$$l_n(\lambda t) \leftarrow \left(\frac{p-\lambda}{p} \right)^n = L_n(p).$$

4°. Изображение гиперболических функций $\operatorname{ch} \alpha t$, $\operatorname{sh} \alpha t$. Они получаются, конечно, сразу же по (37) и II табл. 1:

$$\operatorname{ch} \alpha t = \frac{1}{2} (e^{\alpha t} + e^{-\alpha t}) \leftarrow \div \frac{1}{2} \left(\frac{p}{p - \alpha} + \frac{p}{p + \alpha} \right) = \frac{p^2}{p^2 - \alpha^2}.$$

Итак,

$$\operatorname{ch} \alpha t \leftarrow \div \frac{p^2}{p^2 - \alpha^2} \quad (1.40)$$

и аналогично

$$\operatorname{sh} \alpha t \leftarrow \div \frac{\alpha p}{p^2 - \alpha^2}. \quad (1.41)$$

5°. Изображение тригонометрических функций $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Достаточно в предыдущих формулах положить $\alpha = i\omega$ и заметить, что

$$\operatorname{ch} i\omega t = \cos \omega t, \quad \operatorname{sh} i\omega t = i \sin \omega t;$$

получаем

$$\cos \omega t \leftarrow \div \frac{p^2}{p^2 + \omega^2}, \quad \sin \omega t \leftarrow \div \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2}. \quad (1.42)$$

Воспользовавшись, например, свойством IX табл. 1, далее получаем:

$$t \sin \omega t \leftarrow \div \frac{2\omega p^2}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \cos \omega t \leftarrow \div \frac{p(p^2 - \omega^2)}{(p^2 + \omega^2)^2}.$$

6°. Изображение функций $e^{\alpha t} \cos \omega t$, $e^{\alpha t} \sin \omega t$. Воспользуемся свойством VIII табл. 1 и (42). Имеем

$$e^{-\lambda t} \cos \omega t \leftarrow \div \frac{p}{p + \lambda} F(p + \lambda)$$

и в нашем случае по (42):

$$F(p) = \frac{p^2}{p^2 + \omega^2}, \quad \text{т. е. } F(p + \lambda) = \frac{(p + \lambda)^2}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}.$$

Итак,

$$e^{-\lambda t} \cos \omega t \leftarrow \div \frac{p(p + \lambda)}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}, \quad (1.43)$$

и аналогично:

$$e^{-\lambda t} \sin \omega t \leftarrow \div \frac{\omega p}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}. \quad (1.44)$$

Можно также написать:

$$e^{\alpha t} \cos \omega t \leftarrow \div \frac{p(p-\alpha)}{(p-\alpha)^2 + \omega^2}, \quad e^{\alpha t} \sin \omega t \leftarrow \div \frac{\omega p}{(p-\alpha)^2 + \omega^2}. \quad (1.45)$$

Конечно, эти формулы можно было бы получить и непосредственно из (37), заменяя в этом соотношении α на $\alpha + i\omega$ и приравнявая вещественные и мнимые части слева и справа.

Аналогично получим:

$$e^{-\lambda t} \operatorname{ch} \beta t \leftarrow \div \frac{p(p+\lambda)}{(p+\lambda)^2 - \beta^2}, \quad e^{-\lambda t} \operatorname{sh} \beta t \leftarrow \div \frac{\beta p}{(p+\lambda)^2 - \beta^2}. \quad (1.46)$$

В качестве примера найдём начальную функцию для изображения

$$F(p) = \frac{1}{p^2 + 2mp + n^2},$$

где m и n — постоянные. Имеем:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{n^2} \left(1 - \frac{p^2 + 2mp}{p^2 + 2mp + n^2} \right) = \\ &= \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{p(p+m)}{(p+m)^2 + n^2 - m^2} - \frac{pm}{(p+m)^2 + n^2 - m^2} \right]. \end{aligned}$$

Далее рассматриваем случаи

а. $n^2 - m^2 > 0$; б. $n^2 - m^2 < 0$; в. $n^2 = m^2$.

а. Обозначаем $n^2 - m^2 = n_1^2$. Имеем:

$$F(p) = \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{p(p+m)}{(p+m)^2 + n_1^2} - \frac{mp}{(p+m)^2 + n_1^2} \right]$$

и по (43) и (44) находим:

$$F(p) \rightarrow \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\cos n_1 t + \frac{m}{n_1} \sin n_1 t \right) \right].$$

б. Обозначая $m^2 - n^2 = \alpha^2$, получаем:

$$F(p) \rightarrow \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\operatorname{ch} \alpha t + \frac{m}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha t \right) \right].$$

в. В случае $m = n$ имеем:

$$F(p) = \frac{1}{n^2} \left[1 - \frac{p}{p+n} - \frac{np}{(p+n)^2} \right]$$

и по (36), (38) находим:

$$F(p) \div \rightarrow \frac{1}{n^2} [1 - e^{-nt} (1 + nt)].$$

Итак,

$$\frac{1}{p^2 + 2mp + n^2} \div \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\cos n_1 t + \frac{m}{n_1} \sin n_1 t \right) \right] \\ \quad \text{при } n^2 - m^2 = n_1^2 > 0; \\ \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\operatorname{ch} \alpha t + \frac{m}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha t \right) \right] \\ \quad \text{при } m^2 - n^2 = \alpha^2 > 0; \\ \frac{1}{n^2} [1 - e^{-nt} (1 + nt)] \text{ при } m = n. \end{cases} \quad (1.47)$$

Начальную функцию для изображения $\frac{p}{p^2 + 2mp + n^2}$ можно было бы получить, дифференцируя по t правые части соотношений (47) и имея в виду, что они обращаются в нуль при $t = 0$ [см. (12) и (29)]. Но, конечно, проще непосредственно записать, например, в случае „а“:

$$\begin{aligned} \frac{p}{p^2 + 2mp + n^2} &= \frac{p}{(p + m)^2 + n_1^2} = \\ &= \frac{1}{n_1} \frac{pn_1}{(p + m)^2 + n_1^2} \div \rightarrow \frac{1}{n_1} e^{-mt} \sin n_1 t. \end{aligned}$$

7°. Функции $\operatorname{ch} t \cos t$, $\operatorname{ch} t \sin t$ и т. д. Найдем изображения функции $\operatorname{ch} t \cos t$. По II табл. 1 и (45) имеем:

$$\operatorname{ch} t \cos t = \frac{1}{2} (e^t + e^{-t}) \cos t \div \rightarrow \frac{1}{2} \left[\frac{p(p-1)}{(p-1)^2 + 1} + \frac{p(p+1)}{(p+1)^2 + 1} \right]$$

и после упрощений найдём:

$$\operatorname{ch} t \cos t \div \rightarrow \frac{p^4}{p^4 + 4}. \quad (1.48)$$

Аналогично получаем:

$$\operatorname{ch} t \sin t \div \rightarrow \frac{p(p^2 + 2)}{p^4 + 4}; \quad (1.49)$$

$$\operatorname{sh} t \cos t \div \rightarrow \frac{p(p^2 - 2)}{p^4 + 4}; \quad (1.50)$$

$$\operatorname{sh} t \sin t \div \rightarrow \frac{2p^2}{p^4 + 4}. \quad (1.51)$$

Отсюда получаем формулы, дающие изображения функций, введенных А. Н. Крыловым для решения задачи об изгибе балки, лежащей на упругом основании ¹ (*функции А. Н. Крылова*):

$$\left. \begin{aligned} Y_1(t) &= \operatorname{ch} t \cos t \leftarrow \div \frac{p^4}{p^4 + 4}; \\ Y_2(t) &= \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t \sin t + \operatorname{sh} t \cos t) \leftarrow \div \frac{p^3}{p^4 + 4}; \\ Y_3(t) &= \frac{1}{2} \operatorname{sh} t \sin t \leftarrow \div \frac{p^2}{p^4 + 4}; \\ Y_4(t) &= \frac{1}{4} (\operatorname{ch} t \sin t - \operatorname{sh} t \cos t) \leftarrow \div \frac{p}{p^4 + 4}. \end{aligned} \right\} \quad (1.52)$$

Воспользовавшись свойством III табл. 1, имеем:

$$\left. \begin{aligned} Y_1(\alpha t) &\leftarrow \div \frac{p^4}{p^4 + 4\alpha^4}; \\ Y_2(\alpha t) &\leftarrow \div \frac{\alpha p^3}{p^4 + 4\alpha^4}; \\ Y_3(\alpha t) &\leftarrow \div \frac{\alpha^2 p^2}{p^4 + 4\alpha^4}; \\ Y_4(\alpha t) &\leftarrow \div \frac{\alpha^3 p}{p^4 + 4\alpha^4}. \end{aligned} \right\} \quad (1.53)$$

Основные свойства этих функций можно получить, рассматривая их изображения. Имеем по (29) и (11):

$$Y_4(0) = 0, \quad \frac{dY_4(\alpha t)}{dt} \leftarrow \div \frac{\alpha^3 p^2}{p^4 + 4\alpha^4} \div \rightarrow \alpha Y_3(\alpha t).$$

Далее,

$$Y_3(0) = 0, \quad \frac{dY_3(\alpha t)}{dt} \leftarrow \div \frac{\alpha^2 p^3}{p^4 + 4\alpha^4} \div \rightarrow \alpha Y_2(\alpha t)$$

и

$$Y_2(0) = 0, \quad \frac{dY_2(\alpha t)}{dt} \leftarrow \div \frac{\alpha p^4}{p^4 + 4\alpha^4} \div \rightarrow \alpha Y_1(\alpha t).$$

¹ А. Н. Крылов, О расчете балок, лежащих на упругом основании. Собр. соч., т. V, 1938.

Наконец, из (29) следует, что

$$Y_1(0) = 1, \quad \frac{dY_1(\alpha t)}{dt} \leftarrow \div p \left(\frac{p^4}{p^4 + 4\alpha^4} - 1 \right) = \\ = -\frac{4\alpha^4 p}{p^4 + 4\alpha^4} \rightarrow \div -4\alpha Y_4(\alpha t).$$

Из сказанного получается табличка, дающая последовательные производные функций А. Н. Крылова:

Производные функций А. Н. Крылова

$F(t)$	$F'(t)$	$F''(t)$	$F'''(t)$	$F^{IV}(t)$
$Y_1(t)$	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$	$-4Y_1$
$Y_2(t)$	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$	$-4Y_2$
$Y_3(t)$	Y_2	Y_1	$-4Y_4$	$-4Y_3$
$Y_4(t)$	Y_3	Y_2	Y_1	$-4Y_4$

Таким образом, каждая из этих функций является решением дифференциального уравнения четвёртого порядка

$$Y_s^{IV}(t) + 4Y_s(t) = 0.$$

Начальные значения этих решений и их производных до третьего порядка включительно образуют единичную матрицу:

	$F(0)$	$F'(0)$	$F''(0)$	$F'''(0)$
Y_1	1	0	0	0
Y_2	0	1	0	0
Y_3	0	0	1	0
Y_4	0	0	0	1

Это следует из сказанного выше, но может быть также легко найдено по изображениям (52) и на основании свойства XI (табл. 1).

8°. Функции поперечных колебаний стержня. Эти функции, введённые в рассмотрение также А. Н. Крыловым¹ для решения задач о поперечных колебаниях стержня, определяются так:

$$S(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t + \cos t);$$

$$T(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t + \sin t);$$

$$U(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{ch} t - \cos t);$$

$$V(t) = \frac{1}{2} (\operatorname{sh} t - \sin t).$$

Нетрудно получить их изображения; по (40), (41), (42) получаем:

$$\left. \begin{aligned} S(t) &\leftarrow \div \frac{p^4}{p^4 - 1}; & T(t) &\leftarrow \div \frac{p^3}{p^4 - 1}; \\ U(t) &\leftarrow \div \frac{p^2}{p^4 - 1}; & V(t) &\leftarrow \div \frac{p}{p^4 - 1}. \end{aligned} \right\} \quad (1.54)$$

Как и выше, рассматривая эти изображения, заключаем:

$$V'(t) = U(t); \quad U'(t) = T(t); \quad T'(t) = S(t); \quad S'(t) = V(t),$$

откуда получается следующая таблица:

Таблица производных от функций поперечных колебаний стержня

$F(t)$	$F'(t)$	$F''(t)$	$F'''(t)$	$F^{IV}(t)$
$S(t)$	V	U	T	S
$T(t)$	S	V	U	T
$U(t)$	T	S	V	U
$V(t)$	U	T	S	V

¹ А. Н. Крылов, Вибрация судов. Собр. соч., т. X, 1948, стр. 231.

Таким образом, рассматриваемые функции являются решением дифференциального уравнения:

$$F^{IV}(t) - F(t) = 0.$$

Начальные значения этих решений и их производных до третьего порядка, как это легко получить из приведённой таблицы или на основании (28), также образуют единичную матрицу:

	$F(0)$	$F'(0)$	$F''(0)$	$F'''(0)$
S	1	0	0	0
T	0	1	0	0
U	0	0	1	0
V	0	0	0	1

§ 4. Теоремы разложения

1°. Первая теорема. Предполагается, что изображение $F(p)$ является аналитической функцией от p при $|p| > \frac{1}{\rho}$. Иначе можно сказать, что $F(p)$ — аналитическая функция аргумента $\frac{1}{p}$ при $\frac{1}{|p|} < \rho$. Выше, в § 1, указывалось, что изображение кусочно-непрерывной функции $f(t)$, имеющей при $t \rightarrow \infty$ экспоненциальный порядок роста, определяемый формулой (1), является аналитической функцией от p при $\operatorname{Re} p > s_0$. Иными словами, функции указанного класса имеют изображения $F(p)$, аналитические при достаточно большом $|p|$ и $-\frac{\pi}{2} < \operatorname{Arg} p < \frac{\pi}{2}$. Теперь же требуется, чтобы $F(p)$ было аналитическим при $|p| > \frac{1}{\rho}$ и при *всех* значениях $\operatorname{Arg} p$. Ясно, что это обстоятельство делает класс соответствующих начальных функций более узким; действительно, ниже будет показано, что $f(t)$ в этом случае является целой трансцендентной функцией t , т. е. функцией, представимой степенным

рядом во всей комплексной плоскости t . Эта функция имеет при $t \rightarrow \infty$ экспоненциальный порядок роста.

Итак, по условию $F(p)$ — аналитическая функция аргумента $\frac{1}{p}$ при $|p| > \frac{1}{\rho}$. Поэтому $F(p)$ представима степенным рядом

$$F(p) = c_0 + \frac{c_1}{p} + \frac{c_2}{p^2} + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^k}, \quad (1.55)$$

сходящимся при $\left| \frac{1}{p} \right| < \rho$, причём, согласно известному неравенству Коши для коэффициентов степенного ряда:

$$|c_k| < \frac{M}{\rho_1^k},$$

где $\rho_1 < \rho$ и M — максимум $|F(p)|$ при $\left| \frac{1}{p} \right| = \rho_1$. Имея в виду, что по (33) $\frac{1}{p^k} \rightarrow \frac{t^k}{k!}$, заключаем, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{k!} t^k \quad (1.56)$$

формально является начальной функцией для изображения, представимого рядом (55).

Но нетрудно убедиться, что ряд (56) сходится во всей плоскости t , т. е. представляет целую функцию t . Действительно:

$$\left| \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!} \right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} |c_k| \frac{|t|^k}{k!} < M \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{k!} \frac{|t|^k}{\rho_1^k} = M e^{\frac{|t|}{\rho_1}},$$

что и доказывает утверждение. Обратно, изображение целой функции, модуль которой не превосходит $M e^{\frac{t}{\rho}}$, разлагается в сходящийся ряд по степеням $\frac{1}{p}$ в круге $\left| \frac{1}{p} \right| < \rho$.

¹ См., например, Б. А. Фукс и Б. В. Шабат, Функции комплексного переменного. 1949, стр. 239.

Но вследствие равномерной сходимости степенного ряда (56) можно, умножив этот ряд на $e^{-pt} dt$, произвести почленное интегрирование. Имея еще в виду, что вследствие (33)

$$L \left\{ \frac{t^k}{k!} \right\} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{t^k}{k!} dt = \frac{1}{p^{k+1}},$$

получим

$$L \left\{ \sum_{k=0}^{\infty} c_k \frac{t^k}{k!} \right\} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}}$$

и значит:

$$F(p) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k}{p^{k+1}} \rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \frac{c_k t^k}{k!} = f(t). \quad (1.57)$$

Это предложение составляет содержание *первой теоремы разложения* (Хевисайда).

В качестве примера приведём представления функций А. Н. Крылова в форме степенных рядов. Имеем при $\left| \frac{1}{p} \right| < \frac{1}{\sqrt{2}}$:

$$\frac{p}{p^4 + 4} = \frac{1}{p^3 \left(1 + \frac{4}{p^4} \right)} = \frac{1}{p^3} - \frac{4}{p^7} + \frac{16}{p^{11}} - \frac{64}{p^{15}} + \dots$$

и, значит, при всех t имеют место разложения:

$$Y_4(t) = \frac{t^3}{3!} - \frac{4t^7}{7!} + \frac{16t^{11}}{11!} - \frac{64t^{15}}{15!} + \dots$$

Аналогично получим:

$$Y_3(t) = \frac{t^2}{2!} - \frac{4t^6}{6!} + \frac{16t^{10}}{10!} - \frac{64t^{14}}{14!} + \dots;$$

$$Y_2(t) = t - \frac{4t^5}{5!} + \frac{16t^9}{9!} - \frac{64t^{13}}{13!} + \dots;$$

$$Y_1(t) = 1 - \frac{4t^4}{4!} + \frac{16t^8}{8!} - \frac{64t^{12}}{12!} + \dots$$

Как второй пример найдём начальную функцию для изображения:

$$F(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} = \left(1 + \frac{1}{p^2}\right)^{-\frac{1}{2}}$$

и при $\left|\frac{1}{p}\right| < 1$ получаем:

$$F(p) = 1 - \frac{1}{2} \frac{1}{p^2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \frac{1}{p^4} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{1}{p^6} + \dots$$

Поэтому

$$f(t) = 1 - \frac{1}{2} \frac{t^2}{2} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \cdot \frac{t^4}{4!} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{2 \cdot 4 \cdot 6} \cdot \frac{t^6}{6!} + \dots$$

или

$$f(t) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \frac{\left(\frac{t}{2}\right)^{2\nu} (-1)^\nu}{(\nu!)^2}. \quad (1.58)$$

Этот ряд представляет функцию Бесселя нулевого порядка $J_0(t)$.
Итак,

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \div J_0(t). \quad (1.59)$$

Укажем на одно интересное следствие. Имеем

$$\frac{p}{p^2 + 1} = \frac{1}{p} \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \cdot \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

и по теореме свёртывания X табл. 1 получаем:

$$\sin t = \int_0^t J_0(\tau) J_0(t - \tau) d\tau.$$

В качестве ещё одного примера найдём начальную функцию для изображения

$$F(p) = e^{-\frac{1}{p}} = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{p^k k!} \div \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k t^k}{(k!)^2}.$$

Мы снова получили ряд (58), в котором вместо $t^2/4$ стоит t .
Поэтому

$$e^{-\frac{1}{p}} \div J_0(2\sqrt{t}). \quad (1.60)$$

2°. Вторая теорема разложения. С помощью этой теоремы строится начальная функция, когда изображением является рациональная функция, т. е. отношение двух полиномов:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{a_0 p^m + a_1 p^{m-1} + \dots + a_m}{b_0 p^n + b_1 p^{n-1} + \dots + b_n}, \quad (1.61)$$

где $n \geq m$. Случай $m > n$ не может иметь места, так как начальная функция, соответствующая целой положительной степени p , представляет некоторую разрывную функцию особого рода, о чём будет сказано ниже (§ 6).

Предположим сначала, что все корни полинома $F_2(p)$ в знаменателе (61) — простые, причём нуль не есть корень этой функции, т. е. $F_2(0)$ отлично от нуля. Обозначим эти корни через $p_1, p_2, \dots, p_n$.

Разложим $\frac{1}{p} F(p)$ на простейшие дроби. Полагаем:

$$\frac{1}{p} F(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{C_0}{p} + \sum_{k=1}^n \frac{C_k}{p - p_k}. \quad (1.62)$$

Для определения коэффициента C_0 умножаем обе части (62) на p и затем полагаем $p = 0$. Получаем:

$$C_0 = \frac{F_1(0)}{F_2(0)}. \quad (1.63)$$

Точно так же коэффициент C_s получим, умножив (62) на $p - p_s$ и затем положив $p = p_s$. Находим:

$$C_s = \lim_{p \rightarrow p_s} \left[\frac{p - p_s}{p} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \right].$$

Замечая, что

$$\lim_{p \rightarrow p_s} \frac{p - p_s}{F_2(p)} = \lim_{p \rightarrow p_s} \frac{p - p_s}{F_2(p) - F_2(p_s)} = \frac{1}{F_2'(p_s)},$$

ибо по условию $F_2(p_s) = 0$, находим:

$$C_s = \frac{F_1(p_s)}{p_s F_2'(p_s)}. \quad (1.64)$$

Подстановка в (62) даёт искомое разложение рациональной функции на простейшие дроби:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \cdot \frac{p}{p - p_k}. \quad (1.65)$$

Воспользовавшись теперь (37) и II табл. 1, находим начальную функцию:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div \rightarrow \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.66)$$

Эта формула составляет содержание *второй теоремы разложения* (Хевисайда). Если, в частности, $F_1(p)$ и $F_2(p)$ — чётные полиномы, то каждому корню $F_2(p)$ соответствует корень такой же по абсолютной величине, но обратный по знаку. Группируя в (66) соответствующие этой паре корней слагаемые, получаем:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div \rightarrow \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + 2 \sum_{k=1}^{\frac{n}{2}} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \operatorname{ch} p_k t. \quad (1.67)$$

Предположим теперь, что $F(p)$ нечётно, что возможно, если $F_1(p)$ нечётно, а $F_2(p)$ чётно, так как по условию $F_2(0) \neq 0$. Тогда $F_1(0) = 0$ и, группируя в (66) слагаемые, соответствующие корням $F_2(p)$ противоположных знаков, находим

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \div \rightarrow 2 \sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \operatorname{sh} p_k t. \quad (1.68)$$

Пусть теперь нуль является простым корнем $F_2(p)$, т. е. $p_n = 0$; при этом можно считать $F_1(0) \neq 0$, так как при $F_1(p_n) = 0$ мы имели бы после сокращения на общий множитель уже рассмотренный случай. Нужно выделить слагаемое, соответствующее нулевому корню знаменателя. Полагаем $F_2(p) = p \tilde{F}_2(p)$ причём $\tilde{F}_2(0) \neq 0$. Можно написать:

$$\frac{F_1(p)}{p F_2(p)} = \frac{F_1(p)}{p^2 \tilde{F}_2(p)} = \frac{B}{p} + \frac{A}{p^2} + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{C_k}{p - p_k}. \quad (1.69)$$

Коэффициенты C_k определяются, как и выше, по (64). Далее, умножив обе части (69) на p^2 , для нахождения A полагаем $p=0$, а для нахождения B предварительно дифференцируем по p , а потом делаем $p=0$. Получаем:

$$A = \frac{F_1(0)}{\tilde{F}_2(0)}, \quad B = \left[\frac{d}{dp} \left(\frac{F_1(p)}{\tilde{F}_2(p)} \right) \right]_{p \rightarrow 0}$$

и, значит:

$$\begin{aligned} \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = & \left[\frac{d}{dp} \frac{F_1(p)}{\tilde{F}_2(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \frac{F_1(0)}{\tilde{F}_2(0)} \frac{1}{p} + \\ & + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \frac{p}{p-p_k}. \end{aligned} \quad (1.70)$$

Соответствующая начальная функция будет:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \rightarrow \left[\frac{d}{dp} \frac{F_1(p)}{\tilde{F}_2(p)} \right]_{p \rightarrow 0} + \frac{F_1(0)}{\tilde{F}_2(0)} t + \sum_{k=1}^{n-1} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}. \quad (1.71)$$

Более сложен случай кратных корней. Пусть $p_1, p_2, \dots, p_k$ — корни $F_2(p)$ с кратностями $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_k$ (где $\nu_1 + \nu_2 + \dots + \nu_k = n$), причём нуль не есть корень $F_2(p)$. Разложение на простейшие дроби теперь нужно искать в форме:

$$\frac{F_1(p)}{p F_2(p)} = \frac{C_0}{p} + \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=1}^{\nu_s} \frac{C_{\lambda, s}}{(p-p_s)^\lambda}. \quad (1.72)$$

Как и ранее, находим C_0 по (63):

$$C_0 = \frac{F_1(0)}{F_2(0)}.$$

Обозначим далее ($s=1, 2, \dots, k$)

$$\begin{aligned} C_s(p) &= \frac{F_1(p)}{p F_2(p)} (p-p_s)^{\nu_s} = \\ &= \sum_{\lambda=1}^{\nu_s} C_{\lambda, s} (p-p_s)^{\nu_s-\lambda} + M(p-p_s)^{\nu_s}, \end{aligned} \quad (1.73)$$

где M остаётся конечным при $p=p_s$. Полагая $p=p_s$, находим

$$C_s(p_s) = C_{\nu_s, s}.$$

Дифференцируя далее последовательно обе части (73) и полагая $p = p_s$, находим:

$$C'_s(p_s) = C_{\nu_s-1, s}, \quad C''_s(p_s) = 2! C_{\nu_s-2, s}, \dots, \\ C_s^{(\nu_s-\lambda)}(p_s) = (\nu_s - \lambda)! C_{\lambda, s}.$$

Подстановка в (72) даёт теперь искомое разложение на простейшие дроби:

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=1}^{\nu_s} \frac{C_s^{(\nu_s-\lambda)}(p_s)}{(\nu_s - \lambda)!} \frac{p}{(p - p_s)^\lambda}. \quad (1.74)$$

Соответствующую каждому слагаемому начальную функцию находим по (38); получаем

$$\frac{F_1(p)}{F_2(p)} \rightarrow \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{s=1}^k \sum_{\lambda=1}^{\nu_s} \frac{C_s^{(\nu_s-\lambda)}(p_s)}{(\nu_s - \lambda)!} \frac{t^{\lambda-1}}{(\lambda - 1)!} e^{p_s t}. \quad (1.75)$$

Рассмотрим некоторые примеры. Найдём начальную функцию для изображения:

$$F(p) = \frac{p}{p^4 + 4p^3 + (4 - 2n^2)p^2 - 4n^2p + n^4 - 4n^2}.$$

Корни знаменателя суть:

$$p_1 = n, \quad p_2 = -n, \quad p_3 = n - 2, \quad p_4 = -n - 2.$$

Пусть $n > 2$; тогда все эти корни простые и среди них нет равного нулю. Имеем по (66):

$$F(p) \rightarrow \frac{e^{nt}}{F'_2(n)} + \frac{e^{-nt}}{F'_2(-n)} + \frac{e^{(n-2)t}}{F'_2(n-2)} + \frac{e^{-(n+2)t}}{F'_2(-n-2)},$$

и, проделав вычисление, найдём:

$$F(p) \rightarrow \frac{1}{8n} \left[\frac{e^{nt}}{n+1} + \frac{e^{-nt}}{n-1} - \frac{e^{(n-2)t}}{n-1} - \frac{e^{-(n+2)t}}{n+1} \right].$$

При $n = 0$ изображение будет:

$$F(p) = \frac{1}{p(p+2)^2}$$

и на простейшие дроби следует разлагать функцию $\frac{F(p)}{p}$.
Имеем:

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p^2} + \frac{C}{p+2} + \frac{D}{(p+2)^2}.$$

Умножая обе части на p^2 , получаем

$$\frac{1}{(p+2)^2} = Ap + B + Mp^2,$$

где M — выражение, остающееся конечным при $p = 0$. Тогда

$$B = \frac{1}{4}, \quad A = \left[\frac{d}{dp} \frac{1}{(p+2)^2} \right]_{p=0} = -\frac{1}{4}.$$

Аналогично находим

$$\frac{1}{p^2} = C(p+2) + D + N(p+2),$$

причём N остаётся конечным при $p = -2$. Получаем:

$$D = \frac{1}{4}, \quad C = \left(\frac{d}{dp} \frac{1}{p^2} \right)_{p=-2} = \frac{1}{4}.$$

Итак,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p(p+2)^2} &= \frac{1}{4} \left(-1 + \frac{1}{p} + \frac{p}{p+2} + \frac{p}{(p+2)^2} \right) \div \rightarrow \\ &\div \rightarrow \frac{1}{4} (-1 + t + e^{-2t} + te^{-2t}). \end{aligned}$$

Если $n = 1$, то $p_1 = 1$, $p_2 = p_3 = -1$, $p_4 = -3$ и, значит:

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{1}{(p-1)(p+1)^2(p+3)} = \frac{A}{p-1} + \frac{B}{(p+1)^2} + \frac{C}{p+1} + \frac{D}{p+3};$$

$$A = \left[\frac{1}{(p+1)^2(p+3)} \right]_{p=1} = \frac{1}{16};$$

$$B = \left[\frac{1}{(p-1)(p+3)} \right]_{p=-1} = -\frac{1}{4};$$

$$C = \left[\frac{d}{dp} \frac{1}{(p-1)(p+3)} \right]_{p=-1} = 0;$$

$$D = \left[\frac{1}{(p-1)(p+1)^2} \right]_{p=-3} = -\frac{1}{16}.$$

Следовательно:

$$F(p) = \frac{1}{16} \left(\frac{p}{p-1} - \frac{4p}{(p+1)^2} - \frac{p}{p+3} \right) \div \rightarrow \frac{1}{16} (e^t - 4te^{-t} - e^{-3t}).$$

Наконец, при $n=2$ имеем $p_1=2$, $p_2=-2$, $p_3=0$, $p_4=-4$ и, разлагая $\frac{F(p)}{p}$ на простейшие дроби, получим после аналогичных вычислений:

$$F(p) \div \rightarrow \frac{1}{16} \left(\frac{1}{3} e^{2t} + e^{-2t} - \frac{1}{3} e^{-4t} - 1 \right).$$

В качестве второго примера рассмотрим более общий вопрос. Пусть

$$F(p) = \frac{p}{\Delta(p)}, \quad \Delta(p) = a_0 p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_n,$$

где $a_0 \neq 0$. Полагая, что все корни полинома $\Delta(p)$ простые и что нулевого корня нет ($a_n \neq 0$), получаем по (66):

$$F(p) \div \rightarrow \sum_{k=1}^n \frac{e^{p_k t}}{\Delta'(p_k)} = f(t). \quad (1.76)$$

Применим теперь к построению начальной функции первую теорему разложения. Имеем:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{a_0 p^{n-1} \left(1 + \frac{a_1}{a_0 p} + \dots + \frac{a_n}{a_0 p^n} \right)} = \\ &= \frac{1}{a_0 p^{n-1}} \left(1 - \frac{a_1}{a_0 p} - \dots \right), \end{aligned}$$

причём разложение по степеням $\frac{1}{p}$ сходится в круге некоторого радиуса. Начальная функция будет:

$$f(t) = \frac{1}{a_0} \frac{t^{n-1}}{(n-1)!} - \frac{a_1}{a_0^2} \frac{t^n}{n!} + \dots$$

и из этой формулы следует, что $f(t)$ и её производные до $(n-2)$ -го порядка обращаются в нуль при $t=0$:

$$f(0) = 0, \quad f'(0) = 0, \quad \dots, \quad f^{(n-2)}(0) = 0.$$

$$\text{Далее имеем: } f^{(n-1)}(0) = \frac{1}{a_0}, \quad f^{(n)}(0) = -\frac{a_1}{a_0^2}, \quad \dots$$

С другой стороны, эти величины легко найти по (76). Таким образом, приходим к важным алгебраическим соотношениям:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{k=1}^n \frac{p_k^\lambda}{\Delta'(p_k)} &= 0; \quad \lambda = 0, 1, 2, \dots, n-2 \\ \sum_{k=1}^n \frac{p_k^{n-1}}{\Delta'(p_k)} &= \frac{1}{a_0}; \\ \sum_{k=1}^n \frac{p_k^n}{\Delta'(p_k)} &= -\frac{a_1}{a_0^2}. \end{aligned} \right\} \quad (1.77)$$

3°. Обобщение второй теоремы разложения. Теорема предыдущего пункта, дающая возможность разыскать начальную функцию, когда изображение является отношением двух полиномов, может быть обобщена на случай любой мероморфной функции (отношения двух целых трансцендентных функций). Примером мероморфной функции может служить $\operatorname{th} p$ — отношение целых функций $\operatorname{sh} p$ и $\operatorname{ch} p$. При некоторых ограничениях, точную формулировку которых можно найти в курсах теории функций комплексного переменного,¹ мероморфная функция разлагается в ряд по простейшим дробям:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \frac{p}{p - p_k}. \quad (1.78)$$

Здесь принято, что целая функция в знаменателе $F_2(p)$ имеет только простые корни $p_1, p_2, p_3, \dots$, причём она не имеет нулевого корня; предполагается далее, что вещественные части всех корней ограничены; иными словами, все полюсы $F(p)$ лежат слева от некоторой прямой, параллельной мнимой оси плоскости p . Впрочем, можно ограничиться требованием, чтобы справа от этой прямой лежало лишь *конечное* число полюсов $F(p)$.

¹ Например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, III, Гостехиздат, 1939, стр. 443.

Начальная функция, соответствующая изображению (78), будет

$$f(t) = \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{F_2'(p_k) p_k} e^{p_k t} \longleftrightarrow F(p). \quad (1.79)$$

Если, в частности, $F_2(p)$ — чётная функция, то её корни можно разбить на две группы: p_k и $\tilde{p}_k$, причём $p_k = -\tilde{p}_k$. Предполагая, что и $F_1(p)$ — чётная функция, и группируя в (79) слагаемые, соответствующие парам корней, получим:

$$F(p) = \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \longleftrightarrow \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \operatorname{ch} p_k t. \quad (1.80)$$

Здесь суммирование ведётся по всем корням p_k , но не $\tilde{p}_k$. Если же $F_1(p)$ — нечётная функция, а $F_2(p)$ — чётная, то

$$F(p) \longleftrightarrow 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} \operatorname{sh} p_k t, \quad (1.81)$$

поскольку теперь $F_1(0) = 0$. Суммирование также ведётся по корням p_k .

В качестве примера найдём начальную функцию для изображения

$$F(p) = \frac{\operatorname{th} p}{p} = \frac{\operatorname{sh} p}{p \operatorname{ch} p}.$$

Здесь можно принять $F_1(p) = \frac{\operatorname{sh} p}{p}$, $F_2(p) = \operatorname{ch} p$. Имеем:

$$p_k = \frac{2k-1}{2} \pi i \quad (k = 1, 2, 3, \dots)$$

и, поскольку $F_1(p)$ и $F_2(p)$ — чётны, можно применить (80). Получаем

$$\frac{\operatorname{th} p}{p} \longleftrightarrow 1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi}{2} t}{(2k-1)^2}. \quad (1.82)$$

В заключение для последующих справок приведём таблицу основных формул, полученных в § 3 и 4.

Изображения некоторых функций

I. Единичная функция Хевисайда:

$$\sigma_0(t) \leftarrow \div 1, \quad \sigma_0(t - \tau) \leftarrow \div e^{-p\tau}.$$

II. Изображение степени:

$$\frac{t^n}{n!} \leftarrow \div \frac{1}{p^n} \quad (n \text{ — целое положительное число}).$$

III. Показательная функция:

$$e^{-\lambda t} \leftarrow \div \frac{p}{p + \lambda};$$

$$\frac{t^n}{n!} e^{-\lambda t} \leftarrow \div \frac{p}{(p + \lambda)^{n+1}}.$$

IV. Тригонометрические функции:

$$\cos \omega t \leftarrow \div \frac{p^2}{p^2 + \omega^2}, \quad \sin \omega t \leftarrow \div \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2};$$

$$t \cos \omega t \leftarrow \div \frac{p(p^2 - \omega^2)}{(p^2 + \omega^2)^2}, \quad t \sin \omega t \leftarrow \div \frac{2\omega p^2}{(p^2 + \omega^2)^2};$$

$$e^{-\lambda t} \cos \omega t \leftarrow \div \frac{p(p + \lambda)}{(p + \lambda)^2 + \omega^2}, \quad e^{-\lambda t} \sin \omega t \leftarrow \div \frac{\omega p}{(p + \lambda)^2 + \omega^2};$$

$$te^{-\lambda t} \cos \omega t \leftarrow \div \frac{p[(p + \lambda)^2 - \omega^2]}{[(p + \lambda)^2 + \omega^2]^2}, \quad te^{-\lambda t} \sin \omega t \leftarrow \div \frac{2\omega p(p + \lambda)}{[(p + \lambda)^2 + \omega^2]^2}.$$

$$\text{V. } \frac{p}{p^2 + 2mp + n^2} \div \rightarrow \frac{1}{n_1} e^{-mt} \sin n_1 t \quad (n_1 = \sqrt{n^2 - m^2});$$

$$\frac{p}{p^2 + 2mp + n^2} \div \rightarrow \frac{1}{\alpha} e^{-mt} \operatorname{sh} \alpha t \quad (\alpha = \sqrt{m^2 - n^2});$$

$$\frac{1}{p^2 + 2mp + n^2} \div \rightarrow \frac{1}{n^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\cos n_1 t + \frac{m}{n_1} \sin n_1 t \right) \right];$$

$$\frac{1}{p^2 + 2mp + n^2} \div \rightarrow \frac{1}{\alpha^2} \left[1 - e^{-mt} \left(\operatorname{ch} \alpha t + \frac{m}{\alpha} \operatorname{sh} \alpha t \right) \right].$$

$$\text{VI. } \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \dot{\rightarrow} \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^n \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}$$

($p_1, p_2, \dots, p_n$ — простые корни уравнения $F_2(p) = 0$; среди них не должно быть нулевого корня).

$$\text{VII. } \frac{F_1(p)}{F_2(p)} \dot{\rightarrow} \frac{F_1(0)}{F_2(0)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} e^{p_k t}.$$

$F_1(p), F_2(p)$ — целые трансцендентные функции; $p_1, p_2, \dots$ — корни уравнения $F_2(p) = 0$ (нулевых корней нет); предполагается, что корни лежат слева от некоторой прямой, параллельной мнимой оси.

§ 5. Изображения некоторых кусочно-непрерывных функций. Изображение периодических функций

Весьма ценным преимуществом операционного исчисления является простота действий над функциями, имеющими различные аналитические выражения в различных промежутках значений аргумента. Средством для построения изображений таких функций является теорема запаздывания, имеющая в этих вопросах особо важное применение.

Рассмотрим функцию

$$f(t) = a_1 \sigma_0(t) + (a_2 - a_1) \sigma_0(t - \tau_1) + (a_3 - a_2) \sigma_0(t - \tau_2) + \dots + (a_n - a_{n-1}) \sigma_0(t - \tau_{n-1}), \quad (1.83)$$

где $a_1, a_2, \dots, a_n$ — заданные вещественные постоянные, $\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_{n-1}$ — также заданные положительные числа. Вспомнив определение единичной функции Хевисайда, легко заключить, что функция $f(t)$ равна a_1 , пока $t < \tau_1$; она равна:

$$\begin{aligned} a_1 + (a_2 - a_1) &= a_2 \quad \text{при } \tau_1 < t < \tau_2; \\ a_2 + (a_3 - a_2) &= a_3 \quad \text{„ } \tau_2 < t < \tau_3 \end{aligned}$$

и т. д. Наконец, при $t > \tau_{n-1}$ функция $f(t)$ остаётся равной a_n . Изображение $f(t)$ по I табл. 2 будет:

$$f(t) \leftarrow a_1 + (a_2 - a_1) e^{-p\tau_1} + (a_3 - a_2) e^{-p\tau_2} + \dots + (a_n - a_{n-1}) e^{-p\tau_{n-1}}. \quad (1.84)$$

Графически $f(t)$ изображается ступенчатой линией (рис. 6). Приведём некоторые примеры.

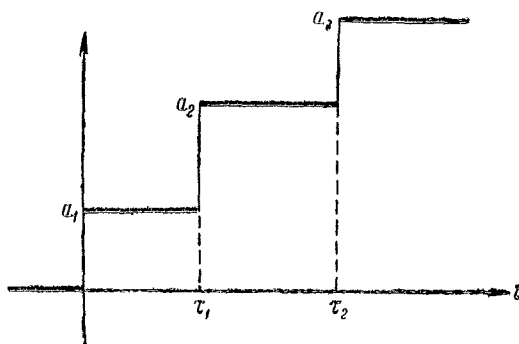


Рис. 6. Ступенчатая функция.

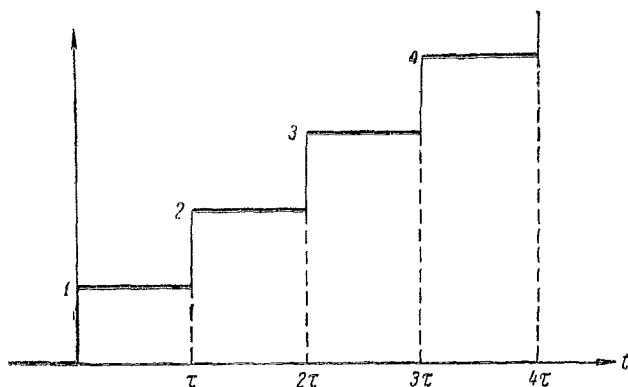


Рис. 7. Ступенчатая функция $\varphi_1(t) \leftarrow \div \frac{1}{1 - e^{-p\tau}}$.

1°. При $a_1 = 1$, $a_2 = 2$, $a_3 = 3$, ...; $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = 2\tau$, ... имеем бесконечный ступенчатый ход со ступенями одинаковой высоты и ширины (рис. 7):

$$\varphi_1(t) = 1 + \sigma_0(t - \tau) + \sigma_0(t - 2\tau) + \dots \leftarrow \div$$

$$\leftarrow \div 1 + e^{-p\tau} + e^{-2p\tau} + \dots$$

или, суммируя геометрическую прогрессию:

$$\varphi_1(t) \leftrightarrow \Phi_1(p) = \frac{1}{1 - e^{-p\tau}} = \frac{1}{2} \left(1 + \operatorname{cth} \frac{p\tau}{2} \right). \quad (1.85)$$

2°. Пусть теперь $\alpha_1 = 1$, $\alpha_2 = -1$, $\alpha_3 = 1$, ...; $\tau_1 = \tau$, $\tau_2 = 2\tau$, ...; тогда $f(t)$ представляет периодическую сту-

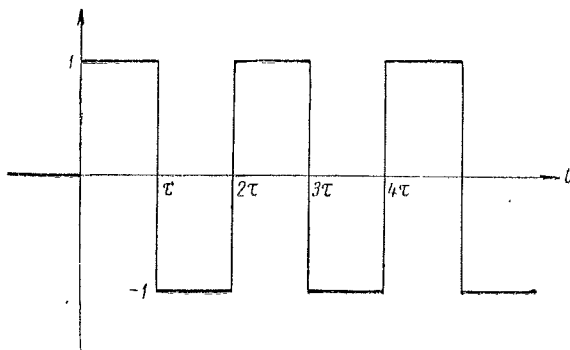


Рис. 8. Периодическая ступенчатая функция

$$\varphi_2(t) \leftrightarrow \operatorname{th} \frac{\tau p}{2}.$$

пенчатую функцию периода 2τ (рис. 8):

$$\begin{aligned} \varphi_2(t) = & 1 - 2\sigma_0(t - \tau) + 2\sigma_0(t - 2\tau) - 2\sigma_0(t - 3\tau) + \\ & + \dots \leftrightarrow 1 - 2e^{-p\tau} + 2e^{-2p\tau} - 2e^{-3p\tau} + \dots \end{aligned}$$

или

$$\varphi_2(t) \leftrightarrow \Phi_2(p) = \operatorname{th} \frac{p\tau}{2} = \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 + e^{-p\tau}}. \quad (1.86)$$

3°. Рассмотрим ещё функцию, график которой дан на рис. 9:

$$\begin{aligned} \varphi_3(t) = & f_0 [1 - \sigma_0(t - \tau) + \sigma_0(t - T) - \sigma_0(t - T - \tau) + \\ & + \dots] \leftrightarrow f_0 (1 - e^{-p\tau} + e^{-pT} - e^{-p(T+\tau)} + \dots) = \\ & = f_0 (1 - e^{-p\tau}) (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) \end{aligned}$$

и, значит:

$$\varphi_3(t) \leftrightarrow \Phi_3(p) = f_0 \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 - e^{-pT}}. \quad (1.87)$$

Можно трактовать $\varphi_3(t)$ как последовательность периодически повторяющихся с периодом T сил величины f_0 ,

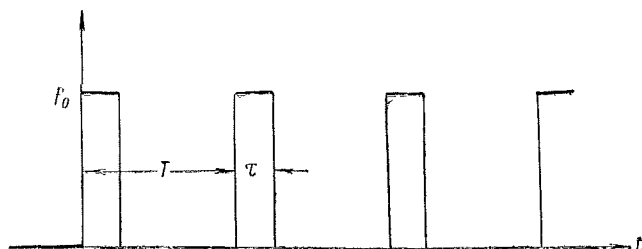


Рис. 9. Периодическое сообщение импульсов:

$$\varphi_3(t) \leftrightarrow f_0 \frac{1 - e^{-p\tau}}{1 - e^{-pT}}.$$

действующих в каждом периоде в течение промежутка времени τ .

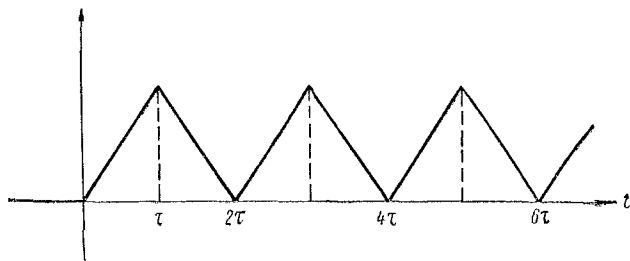


Рис. 10. „Равнокатная крыша“: $\varphi_4(t) \leftrightarrow \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{\tau p}{2}$.

4°. Путём интегрирования, что соответствует умножению изображения на $\frac{1}{p}$, можно получить ряд новых результатов.

Например,

$$\varphi_4(t) = \int_0^t \varphi_2(t) dt \leftarrow \div \frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{p\tau}{2} \quad (1.88)$$

даёт периодическую функцию, график которой изображён на рис. 10 („равноскатная крыша“). Представление этой функции тригонометрическим рядом было получено с помощью второй теоремы разложения:

$$\varphi_4(\tau) = \frac{\tau}{2} + \frac{4\tau}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \frac{(2k-1)\pi}{\tau} t}{(2k-1)^2}.$$

5°. Рассмотрим теперь более общий вопрос. Введём функцию $f(t)$, определяемую соотношениями:

$$f(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1; \\ g(t) & \text{„ } t_1 < t < t_2; \\ 0 & \text{„ } t > t_2. \end{cases} \quad (1.89)$$

Изображение такой функции, согласно основному определению, даётся интегралом:

$$\frac{F(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \int_{t_1}^{t_2} e^{-pt} g(t) dt. \quad (1.90)$$

Отсюда следует, что в рассматриваемом случае (когда t_2 конечно) изображение $F(p)$ будет целой трансцендентной функцией p , так как оно представимо рядом по степеням p , который можно получить заменой e^{-pt} разложением в ряд

$$1 - pt + \frac{1}{2!} (pt)^2 - \dots$$

с последующим почленным интегрированием.

Если желательно избежать вычисления интеграла (90), то можно поступить так: допустим, что известно изображение функции $g(t + \tau) \leftarrow \div G_{\tau}(p)$. Тогда легко составить и $F(p)$:

$$F(p) = e^{-pt_1} G_{t_1}(p) - e^{-pt_2} G_{t_2}(p). \quad (1.91)$$

Действительно, по теореме запаздывания имеем:

$$e^{-pt_1} G_{t_1}(p) \div \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1; \\ g(t + t_1 - t_1) = g(t) & \text{„ } t_1 < t; \end{cases}$$

$$e^{-pt_2} G_{t_2}(p) \div \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{„ } t < t_2; \\ g(t + t_2 - t_2) = g(t) & \text{„ } t > t_2 \end{cases}$$

и, следовательно:

$$F(p) \div \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } t < t_1; \\ g(t) & \text{„ } t_1 < t < t_2; \\ g(t) - g(t) = 0 & \text{„ } t_2 > t, \end{cases}$$

т. е. в соответствии с (89):

$$F(p) \div \rightarrow f(t),$$

что и требовалось.

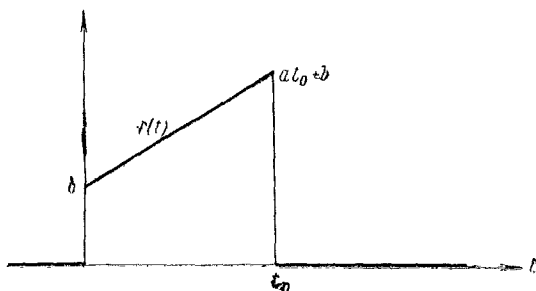


Рис. 11. Отрезок прямой $f(t) \leftarrow \div (1 - e^{-pt_0}) \left(\frac{a}{p} + b \right) - at_0 e^{-pt_0}$.

Пусть, например, требуется построить функцию (рис. 11)

$$f(t) = \begin{cases} at + b & \text{при } t < t_0, \\ 0 & \text{„ } t > t_0. \end{cases}$$

Здесь $t_1 = 0$, $t_2 = t_0$, $g(t) = at + b$ и

$$g(t + \tau) = a(t + \tau) + b \leftarrow \div \frac{a}{p} + a\tau + b = G_\tau(p)$$

и по (91) находим:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{a}{p} + b - e^{-pt_0} \left(\frac{a}{p} + at_0 + b \right) = \\ &= \left(\frac{a}{p} + b \right) (1 - e^{-pt_0}) - at_0 e^{-pt_0}. \end{aligned} \quad (1.92)$$

Этот результат нетрудно проверить, пользуясь теоремой запаздывания.

Заметим, что, в соответствии со сделанным выше замечанием, $F(p)$ является целой трансцендентной функцией p , ибо легко убедиться, что точка $p=0$ не является её полюсом.

6°. В качестве ещё одного примера найдём изображение функции, графически представленной на рис. 12, 1 (трапеция):

$$f(t) = \begin{cases} f_0 \frac{t}{\tau_1} & \text{при } t < \tau_1; \\ f_0 & \text{„ } \tau_1 < t < \tau_2; \\ f_0 \frac{\tau_3 - t}{\tau_3 - \tau_2} & \text{„ } \tau_2 < t < \tau_3; \\ 0 & \text{„ } \tau_3 < t. \end{cases} \quad (1.93)$$

Можно представить $f(t)$ в виде суммы:

$$f(t) = f_1(t) + f_2(t) + f_3(t),$$

где

$$\begin{aligned} f_1(t) &= \begin{cases} f_0 \frac{t}{\tau_1} & \text{при } t < \tau_1; \\ 0 & \text{„ } t > \tau_1; \end{cases} \\ f_2(t) &= \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_1; \\ f_0 & \text{„ } \tau_1 < t < \tau_2; \\ 0 & \text{„ } t > \tau_2; \end{cases} \\ f_3(t) &= \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau_2; \\ f_0 \frac{\tau_3 - t}{\tau_3 - \tau_2} & \text{„ } \tau_2 < t < \tau_3; \\ 0 & \text{„ } t > \tau_3. \end{cases} \end{aligned}$$

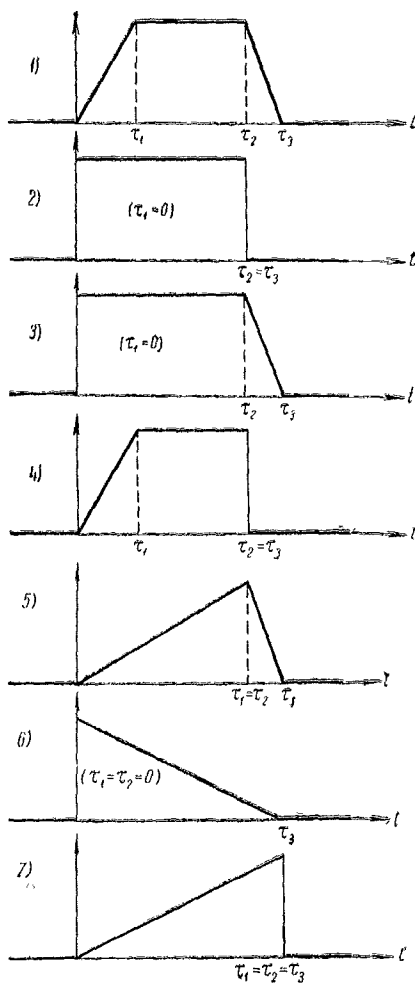


Рис. 12. Общий случай трапеции и отдельные частные случаи (к табл. 3).

По (92) получаем:

$$F_1(p) = \frac{f_0}{p\tau_1} (1 - e^{-p\tau_1}) - f_0 e^{-p\tau_1}.$$

Изображение $f_2(t)$ легко найти, например, по (84):

$$F_2(p) = f_0 (e^{-p\tau_1} - e^{-p\tau_2}).$$

Наконец, изображение $f_3(t)$ строится по (91):

$$F_3(p) = f_0 \left[e^{-p\tau_2} + \frac{e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_2}}{p(\tau_3 - \tau_2)} \right]$$

и, следовательно:

$$F(p) = \frac{f_0}{p} \left[\frac{1}{\tau_1} (1 - e^{-p\tau_1}) + \frac{e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_2}}{\tau_3 - \tau_2} \right]. \quad (1.94)$$

Таблица 3

Изображение $F(p)$	Примечание
$\frac{f_0}{p} \left[\frac{1}{\tau_1} (1 - e^{-p\tau_1}) + \frac{e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_2}}{\tau_3 - \tau_2} \right]$	Рис. 12, 1
$f_0 (1 - e^{-p\tau_2})$	$\tau_1 = 0, \quad \tau_3 = \tau_2$ (рис. 12, 2)
$f_0 \left[1 + \frac{e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_2}}{(\tau_3 - \tau_2)p} \right]$	$\tau_1 = 0$ (рис. 12, 3)
$f_0 \left(\frac{1 - e^{-p\tau_1}}{p\tau_1} - e^{-p\tau_2} \right)$	$\tau_3 = \tau_2$ (рис. 12, 4)
$\frac{f_0}{p} \left[(1 - e^{-p\tau_1}) \frac{1}{\tau_1} + \frac{e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_1}}{\tau_3 - \tau_1} \right]$	$\tau_2 = \tau_1$ (рис. 12, 5)
$f_0 \left(1 - \frac{1 - e^{-p\tau_3}}{p\tau_3} \right)$	$\tau_1 = \tau_2 = 0$ (рис. 12, 6)
$f_0 \left(\frac{1 - e^{-p\tau_1}}{p\tau_1} - e^{-p\tau_1} \right)$	$\tau_1 = \tau_2 = \tau_3$ (рис. 12, 7)

На стр. 62 приведена табл. 3 изображений нескольких интересных для приложений функций, показанных на рис. 12; формулы изображений получены из (94) при частных значениях величин τ_1, τ_2, τ_3 .

7°. Найти изображение одной полувольты синусоиды, т. е. функции времени, определяемой так:

$$f(t) = \begin{cases} \sin \omega t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}; \\ 0 & \text{„ } t > \frac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

В (91) имеем $t_1 = 0, t_2 = \frac{\pi}{\omega}$; далее

$$g\left(t + \frac{\pi}{\omega}\right) = \sin\left(\omega t + \pi\right) = -\sin \omega t \leftarrow \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2}$$

и по (91) получаем:

$$f(t) \leftarrow \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right) = F(p). \quad (1.95)$$

$F(p)$ также является целой функцией, так как и при $p = \pm \omega i$ она имеет конечное значение.

Аналогично находится изображение полувольты косинусоиды, т. е. функции времени, определяемой так:

$$f(t) = \begin{cases} \cos \omega t & \text{при } 0 < t < \frac{\pi}{\omega}; \\ 0 & \text{„ } t > \frac{\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Получаем:

$$f(t) \leftarrow \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right) = F(p). \quad (1.96)$$

8°. Изображение периодической функции. Пусть $\psi(t)$ — периодическая функция периода T ; через $f(t)$ обозначим функцию, равную $\psi(t)$ при $0 < t < T$ и равную нулю при $t > T$. Изображение функции $f(t)$ дается формулой (91), причём в рассматриваемом случае $t_1 = 0, t_2 = T$ и далее $G_{t_1}(p) = \Psi(p) \rightarrow \psi(t), G_{t_2}(p) = \Psi_T(p) \rightarrow \psi(t+T)$. Но по условию периодичности $\psi(t) = \psi(t+T)$ и, значит, $\Psi(p) = \Psi_T(p)$. Подстановка в (91) поэтому даёт:

$$F(p) = \Psi(p)(1 - e^{-pT})$$

и, следовательно,

$$\Psi(p) = \frac{F(p)}{1 - e^{-pT}}. \quad (1.97)$$

Эта важная формула даёт выражение изображения периодической функции $\psi(t)$ через изображение функции $f(t)$, совпадающей с $\psi(t)$ на протяжении периода и равной нулю вне его. Можно установить и обратное предложение: *начальная функция, изображение которой имеет вид (97), причём числитель $F(p)$ представляет изображение функции $f(t)$, равной нулю при $t > T$, является периодической периода T ; эта периодическая функция $\psi(t)$ при $0 < t < T$ равна начальной функции $f(t)$ изображения числителя $F(p)$ формулы (97).*

Для доказательства заметим, что по (90)

$$F(p) = p \int_0^T e^{-pt} f(t) dt, \quad (1.98)$$

т. е. числитель в выражении (97) является, как уже отмечалось выше, целой трансцендентной функцией, обращающейся в нуль при $p = 0$. Поэтому изображение $\Psi(p)$ представляет отношение двух целых функций и для построения начальной функции $\psi(t)$ можно применить вторую теорему разложения в её обобщённой форме. Полюсы функции $\Psi(p)$, т. е. корни знаменателя, суть

$$p_k = \frac{2k\pi i}{T} \quad (k = \pm 1, \pm 2, \dots).$$

Нуль не является полюсом, так как при $p = 0$ числитель выражения $\Psi(p)$ также обращается в нуль. Таким образом:

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} = \int_0^T f(t) dt \lim_{p \rightarrow 0} \frac{pe^{-pt}}{1 - e^{-pT}} = \frac{1}{T} \int_0^T f(t) dt;$$

$$\frac{F_1(p_k)}{p_k F_2'(p_k)} = \frac{1}{Te^{-p_k T}} \int_0^T e^{-p_k t} f(t) dt = \frac{1}{T} \int_0^T e^{-\frac{2k\pi i t}{T}} f(t) dt$$

и по (79) получаем:

$$\psi(t) = \frac{1}{T} \sum_{k=-\infty}^{\infty} e^{\frac{2\pi k i t}{T}} \int_0^T f(t) e^{-\frac{2\pi k i t}{T}} dt. \quad (1.99)$$

Полученное выражение представляет ряд Фурье для функции периода T , принимающей при $0 < t < T$ значения $f(t)$; это доказывает предложение.

Пусть, в частности, $\psi(t)$ — периодическая функция периода $2T$, меняющая знак через полупериод:

$$\psi(t + T) = -\psi(t). \quad (1.100)$$

Как и выше, через $f(t)$ обозначим функцию, равную нулю при $t > T$ и принимающую при $0 < t < T$ те же значения, что и $\psi(t)$. Для построения изображения $f(t)$ можно воспользоваться (91), полагая $t_1 = 0$, $t_2 = T$ и далее $G_{t_1}(p) = \Psi(p) \rightarrow \Psi(t)$, $G_{t_2}(p) = \Psi_T(p) \rightarrow \psi(t + T)$. По (100) теперь $\Psi(p) = -\Psi_T(p)$; получаем:

$$F(p) = \Psi(p)(1 + e^{-pT})$$

и, значит,

$$\Psi(p) = \frac{F(p)}{1 + e^{-pT}}. \quad (1.101)$$

Как и выше, доказывается обратное предложение: изображение периодической функции периода $2T$, меняющей знак через полупериод T , имеет вид (101), причём числитель $F(p)$ представляет изображение функции $f(t)$, обращающейся в нуль при $t > T$; эта периодическая функция $\psi(t)$, равна при $0 < t < T$ начальной функции $f(t)$ изображения числителя (101).

Приведём несколько примеров.

Знаменатель изображения (87) имеет требуемый вид, а числитель представляет функцию, обращающуюся в нуль при $t > T$ (даже при $t > \tau$, где $\tau < T$). Поэтому функция $\varphi_{\Psi}(t)$ — периодическая периода T , принимающая при $0 < t < T$ значения:

$$f(t) = \begin{cases} f_0 & \text{при } t < \tau, \\ 0 & \text{„ } \tau < t < T, \end{cases}$$

как мы видели ранее.

Изображение синуса можно представить в форме:

$$\Psi(p) = \frac{\frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}}\right)}{1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}}} \longleftrightarrow \sin \omega t.$$

Но синус — периодическая функция периода $\frac{2\pi}{\omega}$, меняющая знак через полупериод. Поэтому числитель в приведённой формуле должен изображать функцию, равную нулю при $t > \frac{\pi}{\omega}$ и равную $\sin \omega t$ при $t < \frac{\pi}{\omega}$. Это было установлено ранее — см. формулу (95).

9°. Построить изображение выпрямленной синусоиды, т. е. функции

$$\psi(t) = |\sin \omega t| = \begin{cases} \sin \omega t & 0 < t < \frac{\pi}{\omega}, \\ -\sin \omega t & \frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}. \end{cases}$$

Эта функция — периодическая с периодом $T = \frac{\pi}{\omega}$. В формуле (97) вместо $F(p)$ следует подставить выражение (95). Получаем:

$$\Psi(p) = \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi p}{\omega}}} \longleftrightarrow |\sin \omega t|. \quad (1.102)$$

В качестве следующего примера построим изображение синусоиды, нижние полуволны которой срезаны, т. е. периодической функции $\psi(t)$ периода $\frac{2\pi}{\omega}$, равной $\sin \omega t$ при $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ и равной нулю при $\frac{\pi}{\omega} < t < \frac{2\pi}{\omega}$. По (97) и (95) теперь получим:

$$\psi(t) \longleftrightarrow \Psi(p) = \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{2\pi p}{\omega}}} = \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \frac{1}{1 - e^{-\frac{\pi p}{\omega}}}. \quad (1.103)$$

10°. Изображение представленной на рис. 8 периодической функции $\psi(t)$ периода $2T$, меняющей знак через полупериод T , получается по (101), причём $F(p)$ берётся из второй строки табл. 3. Получаем:

$$\psi(t) = f_0 \frac{1 - e^{-pT}}{1 + e^{-pT}} = f_0 \operatorname{th} \frac{pT}{2},$$

что уже было получено выше иным путём [см. (86)]. Аналогично по (97) с помощью приведённого в пятой строке табл. 3 изображения легко получить изображение (88) функции $\varphi_4(t)$, показанной на рис. 10.

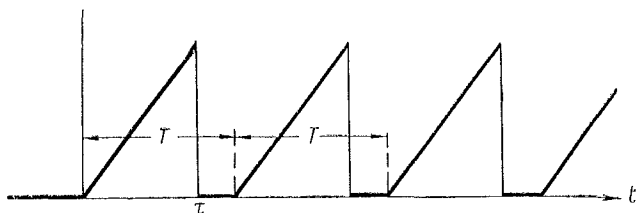


Рис. 13. Периодическая „пилообразная“ функция.

Периодическая „пилообразная“ функция, представленная на рис. 13, имеет изображение

$$\Psi(p) = f_0 \frac{(1 - e^{-p\tau}) \frac{1}{p\tau} - e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \div \rightarrow \psi(t), \quad (1.104)$$

что следует из (97) и последней строки табл. 3. В частности, при $\tau = T$ получаем:

$$\Psi(p) = f_0 \left(\frac{1}{p\tau} - \frac{e^{-p\tau}}{1 - e^{-p\tau}} \right) \div \rightarrow \psi(t).$$

Очевидно, что число подобных примеров можно значительно увеличить.

11°. Выше было показано в общей форме, что применение к построению начальной функции по изображению (97) или (101) обобщенной второй теоремы разложения даёт

представление этой функции в виде тригонометрического ряда. Это очень удобное средство построения тригонометрических рядов заданных периодических функций, не требующее нахождения коэффициентов их с помощью вычисления интегралов.

Найдем, например, представление $|\sin \omega t|$ в форме тригонометрического ряда.

Применяя (78), получаем по (102):

$$F_1(p) = \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \left(1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}} \right),$$

$$F_2(p) = 1 - e^{-\frac{\pi p}{\omega}}.$$

Напомним, что $F_1(p)$ — целая функция.

Полюсы функции $\Psi(p)$ суть:

$$p_k = 2k\omega i, \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots$$

причём нуль не является полюсом, так как при $p = 0$ отношение $F_1(p)/F_2(p)$ конечно. Имеем:

$$\frac{F_1(p_k)}{p_k} = \frac{2}{\omega(1 - 4k^2)},$$

$$F_2'(p_k) = \frac{\pi}{\omega},$$

$$\frac{F_1(0)}{F_2(0)} = \frac{2}{\pi}$$

и, следовательно:

$$|\sin \omega t| = \frac{2}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{e^{2k\omega i t}}{1 - 4k^2}$$

или

$$|\sin \omega t| = \frac{2}{\pi} \left(1 - 2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\omega t}{4k^2 - 1} \right). \quad (1.105)$$

В качестве последнего примера найдём представление в форме тригонометрического ряда периодической функции $\psi(t)$ периода $T=1$, составленной из отрезков парабол (рис. 14).

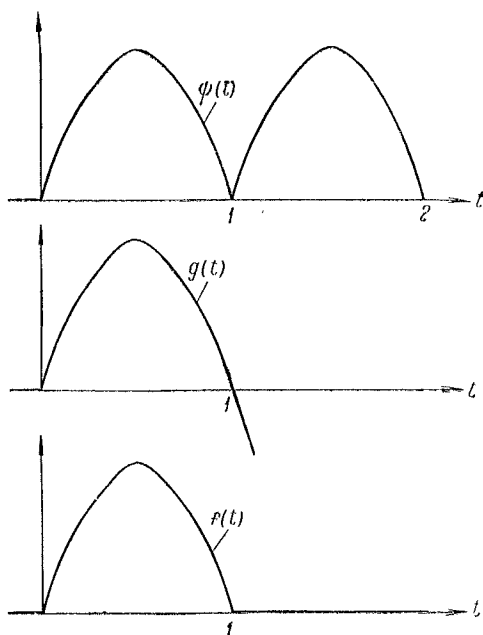


Рис. 14. Периодическая функция $\psi(t) = t - t^2$ (при $0 \leq t \leq 1$) с периодом 1 и вспомогательные функции: $g(t) = t - t^2$, $f(t) = t - t^2$ при $0 \leq t \leq 1$ и $f(t) = 0$ при $t \geq 1$.

В соответствии со сказанным выше строим изображение функции

$$f(t) = \begin{cases} t - t^2 & \text{при } 0 < t < 1, \\ 0 & \text{„ } t > 1. \end{cases}$$

Для этого пользуемся (91), причём $t_1 = 0$, $t_2 = 1$ и

$$g(t) = t - t^2 \leftarrow \frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} = G_{t_1}(p);$$

$$g(t+1) = t+1 - (t+1)^2 = -t - t^2 \leftarrow -\frac{1}{p} - \frac{2}{p^2} = G_{t_2}(p).$$

Находим

$$F(p) = \frac{1}{p} (1 + e^{-p}) - \frac{2}{p^2} (1 - e^{-p})$$

и по (97) находим искомое изображение периодической функции $\psi(t)$:

$$\Psi(p) = \frac{\frac{1}{p} (1 + e^{-p}) - \frac{2}{p^2} (1 - e^{-p})}{1 - e^{-p}}.$$

В числителе стоит целая функция, принимающая при $p=0$ значение:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{p} \left(1 + 1 - p + \frac{p^2}{2} - \dots \right) - \\ & - \frac{2}{p^2} \left(1 - 1 + p - \frac{p^2}{2} + \frac{p^3}{6} - \dots \right) = \frac{p}{6} + \dots \end{aligned}$$

и, значит, в формуле (79) $\frac{F_1(0)}{F_2(0)} = \frac{1}{6}$. Далее имеем:

$$\begin{aligned} & p_k = 2k\pi i; \quad k = \pm 1, \pm 2, \dots \\ & \frac{F_1(p_k)}{p_k} = \frac{2}{p_k^2} = -\frac{1}{2k^2\pi^2}, \quad F'_2(p_k) = 1. \end{aligned}$$

Искомое разложение в тригонометрический ряд будет:

$$\psi(t) = \frac{1}{6} - \frac{1}{\pi^2} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos 2k\pi t}{k^2}. \quad (1.106)$$

§ 6. Импульсивные функции

1°. В § 3 была определена единичная функция

$$\sigma_0(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < 0, \\ 1 & \text{„ } t > 0 \end{cases} \quad (1.107)$$

или в более общем виде:

$$\sigma_0(t - \tau) = \begin{cases} 0 & \text{при } t < \tau, \\ 1 & \text{„ } t > \tau. \end{cases} \quad (1.108)$$

Изображения этих функций даются формулами:

$$\sigma_0(t) \leftarrow \div 1, \quad \sigma_0(t - \tau) \leftarrow \div e^{-p\tau}. \quad (1.109)$$

Следуя сказанному в § 5, рассмотрим теперь функцию (рис. 15):

$$\sigma_1(t; h) = \frac{1}{h} [\sigma_0(t) - \sigma_0(t-h)] = \begin{cases} \frac{1}{h} & \text{при } t < h, \\ 0 & \text{„ } t > h. \end{cases} \quad (1.110)$$

Можно трактовать $\sigma_1(t; h)$ как силу постоянной величины $\frac{1}{h}$, действующую в течение промежутка времени h . Импульс этой силы за промежуток времени её действия равен единице, каково бы ни было h . Если длительность рассматриваемых процессов движения велика по сравнению с h , то целесообразно считать, как это делают в теоретической механике при построении теории удара, силу $\sigma_1(t; h)$ действующей мгновенно. Это приводит к введению в рассмотрение предельной функции

$$\sigma_1(t) = \lim_{h \rightarrow 0} \sigma_1(t; h), \quad (1.111)$$

называемой *единичной импульсивной функцией*. Эта функция равна нулю при всех t , кроме $t=0$; при $t=0$ она обращается в бесконечность, но так, что

$$\lim_{h \rightarrow 0} h \sigma_1(t; h) = 1.$$

Изображение $\sigma_1(t)$ естественно определить как предел при $h \rightarrow 0$ изображения функции $\sigma_1(t; h)$; но по (84) последнее будет:

$$\sigma_1(t; h) \leftarrow \frac{1}{h} (1 - e^{-ph})$$

и поскольку

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} (1 - e^{-ph}) = p,$$

то

$$\sigma_1(t) \leftarrow p. \quad (1.112)$$

Функцию $\sigma_1(t-\tau)$, равную нулю при $t \neq \tau$ и бесконечности при $t=\tau$, можно трактовать как силу, мгновенно

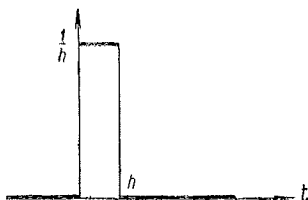


Рис. 15. К определению единичной импульсивной функции. Функция $\sigma_1(t; h)$.

сообщающую в момент $t = \tau$ точке единичной массы скорость, равную единице. Её изображение по (112) и теореме запаздывания будет:

$$\sigma_1(t - \tau) \leftarrow e^{-\nu \tau} p. \quad (1.113)$$

2°. Переходим к определению импульсивной единичной функции второго порядка. Рассмотрим для этого функцию (рис. 16)

$$\sigma_2(t; h) = \frac{1}{h^2} [\sigma_0(t) - 2\sigma_0(t - h) + \sigma_0(t - 2h)], \quad (1.114)$$

т. е.

$$\sigma_2(t; h) = \begin{cases} \frac{1}{h^2} & \text{при } t < h, \\ -\frac{1}{h^2} & \text{„ } h < t < 2h, \\ 0 & \text{„ } 2h < t. \end{cases}$$

Будем рассматривать $\sigma_2(t; h)$ как силу величины $\frac{1}{h^2}$, ме-

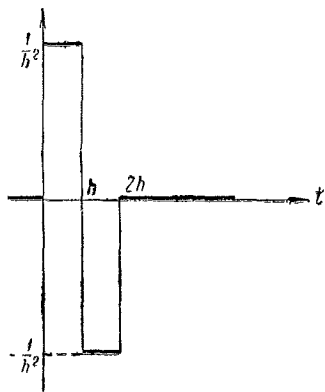


Рис. 16. К определению импульсивной функции второго порядка. Функция $\sigma_2(t; h)$.

няющую своё направление на прямо противоположное при $t = h$ и прекращающую действовать при $t = 2h$. Если такая сила будет действовать на точку единичной массы, то за промежуток времени h точка приобретёт скорость $\frac{h}{h^2} = \frac{1}{h}$ и получит перемещение $\frac{h^2}{2h^2} = \frac{1}{2}$; в течение следующего промежутка времени $(h, 2h)$ скорость будет убывать от $\frac{1}{h}$ до нуля при $t = 2h$; перемещение точки в этот момент времени по известной формуле равноускоренного движения станет

равным $\frac{1}{2} + \frac{1}{h} \cdot h - \frac{h^2}{2h^2} = 1$. Функцию $\sigma_2(t; h)$ можно поэтому трактовать как силу, сообщающую покоящейся точке

единичной массы за промежуток времени $2h$ перемещение, равное единице, и не сообщающую ей скорости.

Полагая $h \rightarrow 0$, получаем совокупность двух последовательно действующих один за другим импульсов, направленных в противоположные стороны, мгновенно сообщаящих покоящейся точке единичной массы единичное перемещение и не сообщаящих ей скорости; это можно пояснить ещё таким вычислением:

$$\begin{aligned}\lim_{h \rightarrow 0} \sigma_2(t; h) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} \left[\frac{\sigma_0(t) - \sigma_0(t-h)}{h} - \frac{\sigma_0(t-h) - \sigma_0(t-2h)}{h} \right] = \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h} [\sigma_1(t; h) - \sigma_1(t-h; h)].\end{aligned}$$

Этот предел называют единичной импульсивной функцией второго порядка и обозначают $\sigma_2(t)$. Изображение функции $\sigma_2(t)$ естественно определить как предел изображения $\sigma_2(t; h)$ при $h \rightarrow 0$. Но мы имеем

$$\sigma_2(t; h) \leftarrow \frac{1}{h^2} (1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph}),$$

и указанный предел легко вычисляется

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{1}{h^2} (1 - 2e^{-ph} + e^{-2ph}) = p^2.$$

Итак,

$$\sigma_2(t) \leftarrow p^2. \quad (1.115)$$

Сообщение импульсов может происходить не в момент $t=0$, а при $t=\tau$; это определяет функцию $\sigma_2(t-\tau)$, изображение которой по теореме запаздывания будет

$$\sigma_2(t-\tau) \leftarrow p^2 e^{-p\tau}.$$

Плодотворность введения в рассмотрение импульсивных функций можно иллюстрировать простым примером. Рассмотрим дифференциальное уравнение движения точки единичной массы, на которую действует сила $f(t)$:

$$\ddot{x} = f(t). \quad (1.116)$$

Пусть начальные условия будут

$$x = x_0, \dot{x} = v_0, \quad \text{при } t = 0. \quad (1.117)$$

По IV табл. 1 находим

$$\ddot{x}(t) \leftarrow p^2 \left[X(p) - x_0 - \frac{v_0}{p} \right]$$

и изображение уравнения (116) будет

$$p^2 X(p) = F(p) + p^2 x_0 + p v_0. \quad (1.118)$$

Но к этому же результату можно прийти, принимая нулевые начальные условия и предполагая, что в момент $t = 0$ к точке прикладывается импульс, сообщающий ей скорость v_0 , а также совокупность двух последовательных, направленных в противоположные стороны импульсов, сообщающих точке перемещение x_0 . Определение импульсивных функций таким образом вполне соответствует правилу учёта начальных значений функции и её производной при составлении изображения второй производной.

Заметим попутно, что по (118)

$$X(p) = \frac{1}{p^2} F(p) + x_0 + \frac{v_0}{p}$$

и по (34) получаем искомое решение:

$$x(t) = \int_0^t f(\tau) (t - \tau) d\tau + x_0 + v_0 t. \quad (1.119)$$

Способ, который был использован выше для определения $\sigma_1(t)$, $\sigma_2(t)$, можно обобщить на импульсивные функции более высокого порядка

$$\sigma_3(t) \leftarrow p^3, \quad \sigma_4(t) \leftarrow p^4 \text{ и т. д.} \quad (1.120)$$

Введения в рассмотрение импульсивных функций можно, конечно, избежать и пользоваться в каждом частном случае вместо них функциями $\sigma_1(t; h)$, $\sigma_2(t; h)$, определёнными выше. Предельный переход $h \rightarrow 0$ может быть сделан в окончательных результатах решения задачи. Однако это усложнило бы без нужды ход вычисления: процесс решения всегда

существенно упрощается при введении импульсивных функций. Заметим, что эти функции широко применяются в теоретической физике.¹

В этой главе изложены наиболее простые, но вместе с тем наиболее важные методы операционного исчисления. Этих средств будет вполне достаточно для решения задач динамики, теории колебаний, теории автоматического регулирования и сопротивления материалов, сводящихся к линейным дифференциальным уравнениям и линейным разностным уравнениям с постоянными коэффициентами, рассматриваемым во второй главе. Решение задач, сводящихся к уравнениям в частных производных, потребует знания изображений более сложных функций и соответствующего расширения методов вычисления. Это будет сделано в шестой главе настоящей книги.

¹ См., например, Д. И в а н е н к о и А. С о к о л о в, Классическая теория поля. Гостехиздат, 1949.

ГЛАВА II

ПРИМЕНЕНИЕ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ И РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ

§ 7. Интегрирование однородного линейного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

1°. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$x^{(n)}(t) + a_1 x^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} x'(t) + a_n x(t) = 0. \quad (2.1)$$

Здесь $x(t)$ — искомая функция; $x', x'', \dots, x^{(n)}$ — её последовательные производные по t ; $a_1, a_2, \dots, a_n$ — не зависящие от t вещественные постоянные. Задача состоит в отыскании интеграла Коши, т. е. решения уравнения (1), удовлетворяющего начальным условиям: при $t = 0$

$$x = x_0, \quad x' = x'_0, \quad \dots, \quad x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)} \quad (2.2)$$

где $x_0, x'_0, \dots, x_0^{(n-1)}$ — заданные числа.

Через $X(p)$ назовём изображение искомого решения:

$$X(p) \rightarrow x(t).$$

По теореме об изображении производной (IV, табл. 1) имеем:

$$\begin{aligned} x^{(n)}(t) &\leftarrow \div p^n \left[X(p) - x(0) - \frac{x'(0)}{p} - \dots - \frac{x^{(n-1)}(0)}{p^{(n-1)}} \right], \\ x^{(n-1)}(t) &\leftarrow \div p^{n-1} \left[X(p) - x(0) - \frac{x'(0)}{p} - \dots - \frac{x^{(n-2)}(0)}{p^{n-2}} \right], \\ &\vdots \\ x'(t) &\leftarrow \div p [X(p) - x(0)]. \end{aligned} \quad (2.3)$$

и, наконец,

$$\psi_{n-1}(t) = \sum_{s=1}^n \frac{e^{p_s t}}{\Delta'(p_s)}. \quad (2.17)$$

Выражая, что решение $\psi_{n-1}(t)$ при $t=0$ удовлетворяет начальным условиям последней строки (11), получаем алгебраические соотношения (1.77), уже найденные ранее ($a_0=1$). Эти соотношения имеют место для любого полинома $\Delta(p)$, все корни которого простые.

В добавление к этому, замечая, что из дифференциального уравнения (1) следует $\psi_{(n-1)}^{(n)}(0) = -a_1 \psi_{n-1}^{(n-1)}(0) = -a_1$, находим:

$$\psi_{n-1}^{(n)}(0) = \sum_{s=1}^n \frac{p_s^n}{\Delta'(p_s)} = -a_1. \quad (2.18)$$

Дифференцируя далее (1) по t один раз, два раза и т. д. и, полагая затем $t=0$, получаем:

$$\begin{aligned} \psi_{n-1}^{(n+1)}(0) &= \sum_{s=1}^n \frac{p_s^{n+1}}{\Delta'(p_s)} = a_1^2 - a_2, \\ \psi_{n-1}^{(n+2)}(0) &= \sum_{s=1}^n \frac{p_s^{n+2}}{\Delta'(p_s)} = -a_1^3 + 2a_1 a_2 - a_3 \end{aligned} \quad (2.18')$$

и т. д.

Общее решение уравнения (1) на основании (7) будет:

$$x(t) = x_0 \psi_0(t) + x_0' \psi_1(t) + \dots + x_0^{(n-1)} \psi_{n-1}(t)$$

или по (15) — (17)

$$x(t) = \sum_{s=1}^n \frac{e^{p_s t}}{p_s \Delta'(p_s)} \sum_{h=0}^{n-1} x_0^{(h)} \Delta_h(p_s). \quad (2.19)$$

Полагая для краткости

$$C_s = \frac{1}{p_s \Delta'(p_s)} \sum_{h=0}^{n-1} x_0^{(h)} \Delta_h(p_s), \quad (2.20)$$

где $s = 1, 2, \dots, n$, находим решение уравнения (1) в общеизвестной форме:

$$x(t) = C_1 e^{p_1 t} + C_2 e^{p_2 t} + \dots + C_n e^{p_n t}. \quad (2.21)$$

Легко проверить, что любое слагаемое этой суммы удовлетворяет уравнению (1). В самом деле, полагая $x_s = C_s e^{p_s t}$ и подставляя в (1), получим:

$$C_s (p_s^n + a_1 p_s^{n-1} + \dots + a_{n-1} p_s + a_n) e^{p_s t} = C_s \Delta(p_s) e^{p_s t} = 0,$$

так как p_s по условию является корнем уравнения (14).

Преимущество изложенного способа решения, конечно, заключается в том, что здесь сразу получен интеграл Коши уравнения (1), так что отпадают вычисления, связанные с определением произвольных постоянных по начальным условиям; формулы (20) дают выражения этих постоянных через начальные данные. Обратно, по (1.77) легко выразить начальные данные через постоянные $C_1, C_2, \dots, C_n$.

3°. Случай простого нулевого корня ($p_n = 0$), когда все остальные корни $p_1, p_2, \dots, p_{n-1}$ — простые, заключается в предшествующих результатах; в самом деле, при этом $a_n = 0$. Значит, $\Delta_0(p) = \Delta(p)$, и одно из основных решений будет:

$$\Psi_0(p) = 1 \rightarrow 1 = \psi_0(t).$$

Далее получим по (6):

$$\begin{aligned} \Psi_1(p) &= \frac{\Delta_1(p)}{\Delta(p)} = \frac{p^{n-2} + a_1 p^{n-3} + \dots + a_{n-2}}{p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}}, \\ &\dots \dots \dots \\ \Psi_{n-1}(p) &= \frac{\Delta_{n-1}(p)}{\Delta(p)} = \frac{1}{p^{n-1} + a_1 p^{n-2} + \dots + a_{n-1}} \end{aligned}$$

и соответствующие начальные функции определяются формулами:

$$\psi_k(t) = \frac{\tilde{\Delta}_k(0)}{\tilde{\Delta}(0)} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\tilde{\Delta}_k(p_s)}{p_s \tilde{\Delta}'(p_s)} e^{p_s t},$$

где через $\tilde{\Delta}(p)$, $\tilde{\Delta}_1(p)$, $\dots$, $\tilde{\Delta}_{n-1}(p)$ обозначены полиномы степени $(n-1)$, $(n-2)$, $\dots$, 0 , получающиеся из $\Delta(p)$,

$\Delta_1(p), \dots, \Delta_{n-1}(p)$ делением на p . Тогда вместо (19) найдём:

$$x(t) = x_0 + \sum_{k=1}^{n-1} x_0^{(k)} \left[\frac{\tilde{\Delta}_k(0)}{\tilde{\Delta}(0)} + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{\tilde{\Delta}_k(p_s)}{\tilde{\Delta}'(p_s)} e^{p_s t} \right]. \quad (2.22).$$

Более сложен случай кратных корней и, в частности, нулевых кратных корней. Для построения начальной функции здесь нужно пользоваться второй теоремой разложения в форме (1.75). Вычисление легко доводится до конца в каждом частном случае, но общие выражения не получаются отчётливыми и простыми. Отметим, что в случае нулевого корня кратности ν в решение войдёт полином степени $(\nu - 1)$ относительно t , в случае же кратного корня p_s , отличного от нуля, решение будет содержать произведение $e^{p_s t}$ на полином относительно t степени, на единицу меньшей чем кратность корня.

Здесь уместно сделать одно общее замечание: при решении каждой конкретно поставленной задачи методами операционного исчисления не следует пользоваться окончательными формулами; предпочтительно идти по пути, намеченному в их выводе, используя попутно все возможности упрощения, которые возникают по ходу вычисления. Например, при наличии комплексных сопряжённых корней характеристического уравнения (14) можно часто сразу выделить слагаемые, отвечающие парам комплексных сопряжённых корней, и составлять соответствующие начальные функции, используя формулы IV табл. 2, тогда как при вычислении по формулам (15) — (17) выделяются слагаемые, отвечающие каждому корню по отдельности с последующим приведением начальных функций к вещественной форме. Аналогично упрощаются вычисления при наличии кратных корней.

4°. Приведём один пример. Проинтегрировать дифференциальное уравнение

$$x^{IV} + 2x''' + 3x'' + 2x' + x = 0$$

при начальных условиях: $x = x_0$, $x' = x'' = x''' = 0$ при $t = 0$.

Изображающее уравнение будет:

$$X(p)(p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1) = x_0(p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p),$$

откуда следует

$$X(p) = x_0 - \frac{x_0}{\Delta(p)}, \quad (2.23)$$

где

$$\Delta(p) = p^4 + 2p^3 + 3p^2 + 2p + 1 = (p^2 + p + 1)^2.$$

Дело сводится к разысканию начальной функции для изображения

$$F(p) = \frac{1}{(p^2 + p + 1)^2}.$$

Характеристическое уравнение имеет двукратные комплексные сопряжённые корни:

$$p_1 = -\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i; \quad p_2 = -\frac{1}{2} - \frac{\sqrt{3}}{2}i.$$

Можно применить для отыскания начальной функции общую формулу (1.75), но это сопряжено со сравнительно сложными выкладками. Повидимому, проще всего здесь поступать так: найдём начальную функцию для изображения

$$\begin{aligned} \frac{1}{p^2 + p + \alpha} &= \frac{1}{\left(p + \frac{1}{2}\right)^2 + \alpha - \frac{1}{4}} \xrightarrow{\div} \\ &\xrightarrow{\div} \frac{1}{\alpha} \left[1 - e^{-\frac{t}{2}} \left(\cos \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}} t + \frac{\sin \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}} t}{2 \sqrt{\alpha - \frac{1}{4}}} \right) \right], \quad (2.24) \end{aligned}$$

где α — некоторый параметр.

Дифференцируем теперь обе части этого соотношения по α и в результате полагаем $\alpha = 1$. Этот прием соответствует дифференцированию по α лапласова интеграла от функции, стоящей в правой части (24), и является вполне законным. Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{(p^2 + p + 1)^2} &\xrightarrow{\div} 1 - \\ &- e^{-\frac{t}{2}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{5}{3} + t \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \left(1 - \frac{t}{3} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right] \end{aligned}$$

и следовательно:

$$x(t) = x_0 e^{-\frac{t}{3}} \left[\frac{1}{\sqrt{3}} \left(\frac{5}{3} + t \right) \sin \frac{\sqrt{3}}{2} t + \left(1 - \frac{t}{3} \right) \cos \frac{\sqrt{3}}{2} t \right].$$

§ 8. Интегрирование линейного неоднородного дифференциального уравнения с постоянными коэффициентами

Перейдём к рассмотрению неоднородного уравнения

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = f(t) \quad (2.25)$$

и будем искать его решение, удовлетворяющее начальным условиям:

$$x = x_0, \quad x' = x'_0, \dots, x^{(n-1)} = x_0^{(n-1)} \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.26)$$

1°. Начнем со случая, когда все начальные данные нули: $x_0^{(k)} = 0$ ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$) и $f(t)$ — единичная функция $\sigma_0(t)$. Соответствующее решение обозначим $\psi_n(t)$:

$$\psi_n^{(n)} + a_1 \psi_n^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} \psi_n' + a_n \psi_n = \sigma_0(t) \quad (2.27)$$

и

$$\psi_n(0) = 0, \quad \psi_n'(0) = 0, \dots, \psi_n^{(n-1)}(0) = 0. \quad (2.28)$$

Изображающее уравнение будет:

$$(p^n + a_1 p^{n-1} + \dots + a_{n-1} p + a_n) \Psi_n(p) = 1, \quad (2.29)$$

или по (5):

$$\Psi_n(p) = \frac{1}{\Delta(p)} \rightarrow \psi_n(t). \quad (2.30)$$

Вспомним теперь, что решение $\psi_{n-1}(t)$ имело изображение

$$\Psi_{n-1}(p) = \frac{p}{\Delta(p)} = p \Psi_n(p) \rightarrow \psi_{n-1}(t) \quad (2.31)$$

и, поскольку $\psi_n(0) = 0$, имеем:

$$\psi_n'(t) = \psi_{n-1}(t). \quad (2.32)$$

Мы будем говорить, что $\psi_n(t)$ описывает *переходный процесс в динамической системе*, поведение которой определяется дифференциальным уравнением (1), при воздействии на неё *единичного возмущения* $\sigma_0(t)$. Формула (31) для изображения $\Psi_{n-1}(p)$ показывает далее, что $\psi_{n-1}(t)$ представляет *переходный процесс в системе под действием единичного импульса* $\sigma_1(t) \leftarrow p$. Аналогично могут быть определены переходные процессы под действием импульсивных воздействий более высокого порядка. Не следует, однако, думать, что, например, $\psi_{n-2}(t)$ представляет в чистом виде переходный процесс от импульсивного воздействия второго порядка; в самом деле:

$$\Psi_{n-2}(p) = \frac{\Delta_{n-2}(p)}{\Delta(p)} = \frac{p^2 + a_1 p}{\Delta(p)} = \frac{p^2}{\Delta(p)} + a_1 \Psi_{n-1}(p),$$

т. е. переходный процесс от импульса второго порядка $\sigma_2(t) \leftarrow p^2$ даётся функцией $\psi_{n-2}(t) - a_1 \psi_{n-1}(t)$.

2°. Возвращаемся к общему случаю; изображающее уравнение для дифференциального уравнения (25) и начальных условий (26) имеет вид:

$$\Delta(p) X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \Delta_k(p) + F(p), \quad (2.33)$$

где использованы обозначения (5) и (6) и $F(p) \rightarrow f(t)$. Получаем:

$$X(p) = \sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \Psi_k(p) + \frac{F(p)}{\Delta(p)}. \quad (2.34)$$

Рассмотрим последнее слагаемое

$$Z(p) = \frac{F(p)}{\Delta(p)} \rightarrow z(t). \quad (2.35)$$

При $x_0^{(k)} = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$) имеем $x(t) = z(t)$, т. е. $z(t)$ представляет решение дифференциального уравнения (25), удовлетворяющее начальным условиям:

$$z = 0, \quad z'(0) = 0, \dots, z^{(n-1)}(0) = 0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.36)$$

Для составления $z(t)$ применим теорему свёртывания (X табл. 1). Тогда по (17):

$$Z(p) = \frac{1}{p} F(p) \frac{p}{\Delta(p)} = \frac{1}{p} F(p) \Psi_{n-1}(p) \rightarrow$$

$$\rightarrow \int_0^t f(\tau) \psi_{n-1}(t-\tau) d\tau = z(t). \quad (2.37)$$

Этой формулой выражается весьма общее и важное свойство динамической системы, поведение которой описывается линейным дифференциальным уравнением (1): *знание переходного процесса $\psi_{n-1}(t)$ в такой системе, обусловленного действием единичного импульса $\sigma_1(t)$, позволяет определить поведение системы при произвольной правой части $f(t)$ — при произвольной „возмущающей силе“.*

Нетрудно проверить непосредственно, что (37) удовлетворяет нулевым начальным условиям (36), а также дифференциальному уравнению (25). Действительно, из (37) следует, что $z(0) = 0$. Далее имеем:

$$z'(t) = \int_0^t f(\tau) \psi'_{n-1}(t-\tau) d\tau + f(t) \psi_{n-1}(0)$$

[второе слагаемое получается при дифференцировании интеграла (37) по верхнему пределу]. Но по (11) имеем $\psi_{n-1}(0) = 0$ и, значит:

$$z'(t) = \int_0^t f(\tau) \psi'_{n-1}(t-\tau) d\tau. \quad (2.38)$$

Аналогично получим

$$z''(t) = \int_0^t f(\tau) \psi''_{n-1}(t-\tau) d\tau,$$

.....

$$z^{(n-1)}(t) = \int_0^t f(\tau) \psi^{(n-1)}_{n-1}(t-\tau) d\tau. \quad (2.39)$$

Итак, $z(t)$ удовлетворяет начальным условиям (36). Далее

$$z^{(n)}(t) = \int_0^t \psi_{n-1}^{(n)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + \psi_{n-1}^{(n-1)}(0) f(t)$$

и, значит:

$$z^{(n)}(t) = \int_0^t \psi_{n-1}^{(n)}(t-\tau) f(\tau) d\tau + f(t). \quad (2.40)$$

Из выражений (37)—(40) тотчас же следует, что $z(t)$ удовлетворяет также и дифференциальному уравнению (25); действительно:

$$\begin{aligned} z^{(n)}(t) + a_1 z^{(n-1)}(t) + \dots + a_{n-1} z'(t) + a_n z(t) = \\ = f(t) + \int_0^t f(\tau) [\psi_{n-1}^{(n)}(t-\tau) + a_1 \psi_{n-1}^{(n-1)}(t-\tau) + \\ + \dots + a_{n-1} \psi_{n-1}'(t-\tau) + a_n \psi_{n-1}(t-\tau)] d\tau = f(t), \end{aligned}$$

так как $\psi_{n-1}(t)$ является решением однородного уравнения (1).

3°. Будем говорить, что нулевые начальные условия (36) определяют начальное равновесное состояние рассматриваемой динамической системы; тогда $z(t)$ даёт отклонение этой системы от её равновесного состояния в любой момент времени, вызванное действием возмущающей силы $f(t)$. Оказывается возможным дать некоторую грубую *оценку модуля этого отклонения* при весьма общем предположении о характере изменения возмущающей силы. Действительно, по (37) имеем:

$$|z(t)| = \left| \int_0^t \psi_{n-1}(t-\tau) f(\tau) d\tau \right| \leq \int_0^t |\psi_{n-1}(t-\tau) f(\tau)| d\tau.$$

Предположим, что функция $f(t)$ („возмущающая сила“) при всех значениях t ограничена по модулю:

$$|f(t)| \leq M. \quad (2.41)$$

Тогда можно написать:

$$|z(t)| \leq M \int_0^t |\psi_{n-1}(t-\tau)| d\tau = M \int_0^t |\psi_{n-1}(\xi)| d\xi. \quad (2.42)$$

Промежуток изменения $(0, t)$ независимого переменного разобьем на промежутки, в которых $\psi_{n-1}(t)$ сохраняет знак: $(0, t_1)$, (t_1, t_2) , ..., (t_k, t) , где t_i ($i=1, 2, \dots, k$) — корни функции $\psi_{n-1}(t)$ в промежутке $(0, t)$. В первом из этих промежутков $\psi_{n-1}(t) > 0$, так как $\psi_{n-1}(t)$ при $t=0$ обращается в нуль, а её первая, не обращающаяся в нуль производная при $t=0$ положительна. Итак,

$$\psi_{n-1}(t) > 0, \text{ т. е. } |\psi_{n-1}(t)| = \psi_{n-1}(t) \quad \text{при} \quad 0 < t < t_1$$

$$\psi_{n-1}(t) < 0, \text{ т. е. } |\psi_{n-1}(t)| = -\psi_{n-1}(t) \quad \text{»} \quad t_1 < t < t_2$$

и т. д. Поэтому (42) можно переписать в форме:

$$\frac{1}{M} |z(t)| \leq \int_0^{t_1} \psi_{n-1}(\tau) d\tau - \int_{t_1}^{t_2} \psi_{n-1}(\tau) d\tau + \dots + (-1)^k \int_{t_k}^t \psi_{n-1}(\tau) d\tau.$$

Вспоминая теперь (32), получаем:¹

$$\begin{aligned} \frac{1}{M} |z(t)| \leq \psi_n(t_1) - [\psi_n(t_2) - \psi_n(t_1)] + \dots + \\ + (-1)^k [\psi_n(t) - \psi_n(t_k)]. \end{aligned} \quad (2.43)$$

Предположим теперь, что интеграл

$$\int_0^\infty |\psi_{n-1}(\tau)| d\tau = L \quad (2.44)$$

сходится; это будет иметь место, если все корни характеристического уравнения (14) имеют отрицательные вещественные части, т. е. если коэффициенты этого уравнения удовлетворяют известным условиям Раута — Гурвица.² Тогда

$$L = \psi_n(t_1) - [\psi_n(t_2) - \psi_n(t_1)] + [\psi_n(t_3) - \psi_n(t_2)] + \dots \quad (2.45)$$

Ясно, что это число L больше правой части неравенства (43) при любом t ; поэтому получаем оценку

$$|z(t)| < ML. \quad (2.46)$$

¹ Напомним, что $\psi_n(0) = 0$.

² См., например, А. Г. Курош, Курс высшей алгебры. 1946, стр. 310.

Эта формула дает оценку максимума модуля возможного отклонения $z(t)$ динамической системы,¹ описываемой дифференциальным уравнением (1), при воздействии на неё „возмущающей силы“, ограниченной по модулю, но изменяющейся по какому угодно закону во времени. Для составления оценки (46) нужно по (45) знать корни выражения, дающего переходный процесс под воздействием единичного импульса $\sigma_1(t)$, и значения в этих точках переходного процесса от единичного возмущения $\sigma_0(t)$.

В частном случае, когда все корни характеристического уравнения (14) вещественны (и отрицательны), то, как показал Н. Г. Чеботарев, $\psi_{n-1}(t)$ не обращается в нуль при $t \neq 0$.² Имеем тогда

$$|\psi_{n-1}(t)| = \psi_{n-1}(t)$$

и, значит:

$$L = \int_0^{\infty} \psi_{n-1}(t) dt = \int_0^{\infty} \psi'_n(t) dt = \psi_n(\infty).$$

Это число легко определить. Действительно, по определению лапласова интеграла

$$L\{\psi_{n-1}(t)\} = \frac{\Psi_{n-1}(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} \psi_{n-1}(t) dt \quad (2.47)$$

и так как интеграл справа сходится при $p = 0$, то по (6) и (8)

$$\int_0^{\infty} \psi_{n-1}(t) dt = \psi_n(\infty) = \lim_{p \rightarrow 0} \frac{\Psi_{n-1}(p)}{p} = \frac{1}{\Delta(0)} = \frac{1}{a_n}.$$

Итак, в рассматриваемом случае

$$L = \frac{1}{a_n} \quad \text{и} \quad |z(t)| < \frac{M}{a_n}.$$

Рассмотрим дифференциальное уравнение:

$$x^{(n)} + a_1 x^{(n-1)} + \dots + a_{n-1} x' + a_n x = M,$$

¹ В предположении, что соблюдены условия Раута — Гурвица.

² См. „Письмо Н. Г. Чеботарева об одной математической задаче“. Журнал „Автоматика и телемеханика“, IX, № 4, 1948.

где M — постоянно. Оно имеет очевидное частное решение $x = \frac{M}{a_n}$, которое можно назвать статическим отклонением системы. Мы получили следующее предложение: если отклонения в переходном процессе под действием единичного импульса не меняют знака, то при любом законе изменения во времени „возмущающей силы“ $f(t)$, действующей на систему, отклонения не превзойдут по модулю статического отклонения под действием силы, равной максимуму модуля возмущающей силы.

Попутно заметим, что из выражения (17) для $\psi_{n-1}(t)$ и из (47) следует, что

$$\int_0^{\infty} \psi_{n-1}(t) dt = - \sum_{s=1}^{\infty} \frac{1}{p_s \Delta'(p_s)} = \frac{1}{a_n}. \quad (2.48)$$

4°. Возвращаясь к (34), будем для простоты предполагать, что характеристическое уравнение (14) имеет простые корни $p_1, p_2, \dots, p_n$, среди которых нет равного нулю.

Тогда

$$Z(p) = \frac{F(p)}{\Delta(p)} = \frac{1}{p} F(p) \frac{p}{\Delta(p)} = \frac{1}{p} F(p) \sum_{s=1}^n \frac{1}{\Delta'(p_s)} \frac{p}{p - p_s}$$

и по теореме свёртывания

$$z(t) = \sum_{s=1}^n \frac{e^{p_s t}}{\Delta'(p_s)} \int_0^t f(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau.$$

Далее по (21) имеем:

$$\sum_{k=0}^{n-1} x_0^{(k)} \Psi_k(p) \rightarrow \sum_{s=1}^n C_s e^{p_s t},$$

где постоянные C_s определяются через начальные данные по (20). По (34) теперь находим:

$$x(t) = \sum_{s=1}^n e^{p_s t} \left[C_s + \frac{1}{\Delta'(p_s)} \int_0^t f(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau \right].$$

В конкретных примерах нет нужды для построения решения прибегать к этой формуле, так как часто можно непосредственно найти начальную функцию $z(t)$ по её изображению $Z(p)$, не пользуясь теоремой свёртывания.

Б°. Рассмотрим важный частный случай, когда $f(t)$ — периодическая функция от t периода T . По (1.97) её изображение может быть представлено в форме

$$F(p) = \frac{K(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (2.49)$$

где $K(p)$ — изображение функции $k(t)$, равной нулю при $t > T$ и $f(t)$ — при $0 < t < T$. Изображение решения $x(t)$ теперь можно записать в форме

$$\begin{aligned} X(p) &= \sum_{s=1}^n \left[C_s + \frac{1}{\Delta'(p_s)} \frac{F(p)}{p} \right] \frac{p}{p - p_s} = \\ &= \sum_{s=1}^n \left[C_s + \frac{1}{\Delta'(p_s)} \frac{K(p)}{(1 - e^{-pT})p} \right] \frac{p}{p - p_s} \end{aligned}$$

или же в форме

$$X(p) = \frac{\Theta(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (2.50)$$

где обозначено

$$\Theta(p) = \sum_{s=1}^n \left[C_s (1 - e^{-pT}) + \frac{1}{\Delta'(p_s)} \frac{K(p)}{p} \right] \frac{p}{p - p_s}. \quad (2.51)$$

По теореме § 5, 8° начальная функция $x(t)$, соответствующая изображению (50), будет также периодической с периодом T , если начальная функция $\vartheta(t) \leftarrow \Theta(p)$ при $t > T$ обращается в нуль; тогда $x(t) = \vartheta(t)$ при $0 \leq t \leq T$.

Поэтому для разыскания решения дифференциального уравнения (25), имеющего тот же период T , что и его правая часть $f(t)$ — возмущающая сила, нужно так подобрать постоянные C_s или, что то же самое, начальные данные $x_0^{(k)}$, чтобы $\vartheta(t)$ обращался в нуль при $t > T$. Покажем, что за исключением некоторых особых случаев это можно сделать.

Используя теорему запаздывания и теорему свёртывания, можем по (51) написать при $t < T$:

$$\vartheta(t) = \sum_{s=1}^n e^{p_s t} \left[C_s + \frac{1}{\Delta'(p_s)} \int_0^t k(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau \right]$$

или, имея в виду, что $k(\tau) = f(\tau)$, пока $\tau < T$,

$$\vartheta(t) = \sum_{s=1}^n e^{p_s t} \left[C_s + \frac{1}{\Delta'(p_s)} \int_0^t f(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau \right]. \quad (2.52)$$

При $t > T$ имеем:

$$\frac{p}{p - p_s} (1 - e^{-p_s T}) \rightarrow e^{p_s t} - e^{p_s (t-T)} = e^{p_s t} (1 - e^{-p_s T})$$

и далее

$$\begin{aligned} \frac{K(p)}{p} \frac{p}{p - p_s} &\rightarrow \int_0^t k(\tau) e^{p_s (t-\tau)} d\tau = e^{p_s t} \left[\int_0^T k(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau + \right. \\ &\quad \left. + \int_T^t k(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau \right] = e^{p_s t} \int_0^t f(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau, \end{aligned}$$

так как $k(t) = 0$ при $t > T$. Поэтому при $t > T$:

$$\vartheta(t) = \sum_{s=1}^n e^{p_s t} \left[C_s (1 - e^{-p_s T}) + \frac{1}{\Delta'(p_s)} \int_0^T f(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau \right]. \quad (2.53)$$

Это выражение обратится в нуль при всех t , если коэффициент при каждом из множителей $e^{p_s t}$ обратится в нуль. Получаем систему уравнений ($s = 1, 2, \dots, n$):

$$C_s (1 - e^{-p_s T}) + \frac{1}{\Delta'(p_s)} \int_0^T f(\tau) e^{-p_s \tau} d\tau = 0. \quad (2.54)$$

Пусть

$$1 - e^{-p_s T} \neq 0 \quad (s = 1, 2, \dots, n), \quad (2.55)$$

тогда из (54)

$$C_s = -\frac{1}{\Delta'(p_s)} \cdot \frac{1}{1 - e^{-p_s T}} \int_0^T e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau, \quad (2.56)$$

и подстановка в (52) даёт искомое периодическое решение:

$$x(t) = \vartheta(t) = \sum_{s=1}^n \frac{e^{p_s t}}{\Delta'(p_s)} \left[\int_0^t e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - \frac{1}{1 - e^{-p_s T}} \int_0^T e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau \right]. \quad (2.57)$$

Этой формулой можно пользоваться для вычисления $x(t)$ в промежутке времени $(0, T)$; но этого и достаточно, так как вследствие периодичности функции $x(t)$, её значение для любого t вычисляется из условия

$$x(t - nT) = x(t). \quad (2.58)$$

Из (2.57) легко получить, что

$$x(0) = x(T) = - \sum_{s=1}^n \frac{\int_0^T e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau}{(1 - e^{-p_s T}) \Delta'(p_s)}$$

и далее

$$x'(0) = x'(T), \dots, x^{(n-1)}(0) = x^{(n-1)}(T). \quad (2.59)$$

Итак, при $t = T$ функция $x(t)$ и её производные до $(n-1)$ -го порядка включительно имеют те же значения, что и при $t = 0$; иными словами, начальные значения решения $x(t)$ дифференциального уравнения (25) для интервала $(T, 2T)$ те же, что для интервала $(0, T)$. Поскольку коэффициенты уравнения не зависят от времени, а свободный член представляет периодическую функцию периода T , это показывает, что $x(t)$ принимает при $T \leq t \leq 2T$ те же значения, что и при $0 \leq t \leq T$; сказанное распространяется на интервал $(2T, 3T)$ и т. д. Это ещё раз подтверждает периодичность полученного решения.

6°. Предположим теперь, что условие (55) не имеет места. Это случится, если

$$e^{-p_s T} = 1, \quad (2.60)$$

т. е. если при некоторых s

$$p_s = 0 \quad \text{или} \quad p_s = \pm \frac{2k\pi i}{T}, \quad (2.61)$$

где k — целое число.

Рассмотрим сначала первый случай, т. е. что характеристическое уравнение (14) имеет нулевой корень. Обозначим этот корень через p_n и пусть для $s = 1, 2, \dots, n-1$ неравенства (55) соблюдаются. Как следует из последнего уравнения (54) для $s = n$, уравнение (25) может иметь периодическое решение лишь при условии

$$\int_0^T f(\tau) d\tau = 0. \quad (2.62)$$

Соответствующая постоянная C_n остаётся при этом неопределённой, а постоянные C_s при $s = 1, 2, \dots, n-1$ находятся, как и выше, по (56). Подстановка в (52) даёт:

$$x(t) = C_n + \frac{1}{\Delta'(0)} \int_0^t f(\tau) d\tau + \\ + \sum_{s=1}^{n-1} \frac{e^{p_s t}}{\Delta'(p_s)} \left[\int_0^t e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau - \frac{\int_0^T e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau}{1 - e^{-p_s T}} \right]. \quad (2.63)$$

Предположим теперь, что характеристическое уравнение имеет пару чисто мнимых корней

$$p_{n-1} = -p_n = \frac{2k\pi i}{T}, \quad (2.64)$$

тогда как для всех остальных его корней $p_1, p_2, \dots, p_{n-2}$ соблюдаются неравенства (55). Можно сказать, что в этом случае в движениях, совершаемых динамической системой, описываемой уравнением (1), имеются свободные колебания с частотой $\frac{2k\pi}{T}$. Условия (54) будут соблюдены при $s = n-1$

и $s = n$, если

$$\int_0^T e^{\pm \frac{2k\pi i}{T} \tau} f(\tau) d\tau = 0$$

или

$$\int_0^T f(\tau) \cos \frac{2k\pi}{T} \tau d\tau = 0, \quad \int_0^T f(\tau) \sin \frac{2k\pi}{T} \tau d\tau = 0, \quad (2.65)$$

т. е. если в разложении „возмущающей силы“ $f(t)$ в ряд Фурье отсутствуют гармоники k -го порядка, имеющие частоту свободных колебаний системы. Если условия (65) не соблюдены, то периодического решения дифференциального уравнения (25) не существует: имеет место резонанс k -ой гармоники возмущающей силы со свободными колебаниями системы.

Если условия (65) соблюдены, то C_{n-1} и C_n остаются неопределёнными (они комплексные и сопряжённые), а C_s при $s = 1, 2, \dots, n-2$ находятся из (56). Подстановка в (52) даёт искомое периодическое решение:

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{\frac{2\pi i k}{T} t} \left[C_{n-1} + \frac{1}{\Delta' \left(\frac{2\pi i k}{T} \right)} \int_0^t f(\tau) e^{-\frac{2\pi i k}{T} \tau} d\tau \right] + \\ & + e^{-\frac{2\pi i k}{T} t} \left[C_n + \frac{1}{\Delta' \left(-\frac{2\pi i k}{T} \right)} \int_0^t f(\tau) e^{\frac{2\pi i k}{T} \tau} d\tau \right] + \\ & + \sum_{s=1}^{n-2} \frac{e^{p_s t}}{\Delta'(p_s)} \left[\int_0^t e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau - \frac{\int_0^T e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau}{1 - e^{-p_s T}} \right]. \quad (2.66) \end{aligned}$$

7°. Для приложений представляет интерес случай, когда возмущающая сила $f(t)$ является периодической функцией времени периода $2T$, меняющей знак через полупериод. По (1.101) изображение такой функции дается формулой:

$$F(p) = \frac{K(p)}{1 + e^{-pT}}, \quad (2.67)$$

где, как и выше,

$$K(p) \rightarrow k(t) = \begin{cases} f(t) & \text{при } t < T, \\ 0 & \text{при } t > T. \end{cases}$$

Построение периодического решения $x(t)$ дифференциального уравнения (25), имеющего тот же период $2T$ и меняющего знак через полупериод T , делается так же, как и выше. Если предположить, что для всех корней характеристического уравнения (14) удовлетворено неравенство

$$1 + e^{-p_s T} \neq 0, \quad (2.68)$$

то искомое периодическое решение при $0 < t < T$ будет:

$$x(t) = \sum_{s=1}^n \frac{e^{p_s t}}{\Delta'(p_s)} \left[\int_0^t e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau - \frac{\int_0^T e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau}{1 + e^{-p_s T}} \right]. \quad (2.69)$$

Это решение нечётным образом продолжается в промежуток $(T, 2T)$:

$$x(t + T) = -x(t) \quad (2.70)$$

и далее находится по условию периодичности

$$x(t + 2T) = x(t). \quad (2.71)$$

Неравенство (68) не будет соблюдено, если в числе корней характеристического уравнения (14) имеется пара сопряжённых мнимых корней

$$p_{n-1} = -p_n = \frac{(2k+1)\pi i}{T}, \quad (2.72)$$

где k — целое число. Предположим, что остальные корни характеристического уравнения $p_1, p_2, \dots, p_{n-2}$ удовлетворяют неравенству (68). Дифференциальное уравнение (25) будет иметь периодическое решение периода $2T$, меняющее знак через полупериод при условиях:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^T f(\tau) \cos \frac{(2k+1)\pi}{T} \tau d\tau &= 0, \\ \int_0^T f(\tau) \sin \frac{(2k+1)\pi}{T} \tau d\tau &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.73)$$

выражающих обращение в нуль амплитуд соответствующих гармоник в разложении возмущающей силы в ряд Фурье.

При соблюдении условий (73) соответствующее решение при $0 < t < T$ будет:

$$\begin{aligned}
 x(t) = & e^{\frac{(2k+1)\pi i}{T}t} \left[C_{n-1} + \frac{1}{\Delta' \left(\frac{(2k+1)\pi i}{T} \right)} \int_0^t e^{-\frac{(2k+1)\pi i}{T}\tau} f(\tau) d\tau \right] + \\
 & + e^{-\frac{(2k+1)\pi i}{T}t} \left[C_n + \frac{1}{\Delta' \left(-\frac{(2k+1)\pi i}{T} \right)} \int_0^t e^{\frac{(2k+1)\pi i}{T}\tau} f(\tau) d\tau \right] + \\
 & + \sum_{s=1}^{n-2} \frac{e^{p_s t}}{\Delta'(p_s)} \left[\int_0^t e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau - \frac{\int_0^t e^{-p_s \tau} f(\tau) d\tau}{1 + e^{-p_s T}} \right]. \quad (2.74)
 \end{aligned}$$

Аналогично строится периодическое решение уравнения (25) в тех случаях, когда характеристическое уравнение (14) имеет кратные корни. Запись результатов в общем виде становится громоздкой, но в каждом частном случае не представляет затруднений провести приведённый выше ход рассуждений. Напомним вкратце соответствующий порядок действий.

Составляем выражение числителя $\Theta(p)$ в формуле (50) для изображения $X(p)$ искомого решения; затем выписываем выражение начальной функции $\vartheta(t) \leftarrow \Theta(p)$ для $t > T$; это выражение надо сделать равным нулю тождественно, для чего необходимо обратить в нуль коэффициенты при $e^{p_s t}$, $te^{p_s t}$, ..., $t^{v_s-1}e^{p_s t}$, где v_s — кратность корня p_s и s принимает значения $1, 2, \dots, k$, причём $v_1 + v_2 + \dots + v_k = n$. Таким образом, получаются n уравнений, определяющих n постоянных C_s , которые и нужно подставить в выражение $\vartheta(t) = x(t)$ при $0 < t < T$. Исключительные случаи наличия нулевых и чисто мнимых корней характеристического уравнения, кратных частотам возмущающей силы, трактуются так же, как в приведённом выше рассмотрении.

8°. В качестве примера на случай двойного нулевого корня рассмотрим задачу о разыскании периодического решения дифференциального уравнения:

$$x^{IV} + \omega^2 x'' = f(t), \quad (2.75)$$

где $f(t)$ имеет период T и её изображение даётся формулой (49).

Изображающее уравнение будет

$$p^2(p^2 + \omega^2) X(p) = p^2(p^2 + \omega^2) x_0 + p(p^2 + \omega^2) x'_0 + \\ + p^2 x''_0 + p x'''_0 + \frac{K(p)}{1 - e^{-pT}}.$$

Тогда

$$X(p) = \frac{\Theta(p)}{1 - e^{-pT}},$$

где обозначено

$$\Theta(p) = \frac{K(p)}{p^2(p^2 + \omega^2)} + \left(x_0 + \frac{x'_0}{p} + \frac{x''_0}{p^2 + \omega^2} + \frac{x'''_0}{p(p^2 + \omega^2)} \right) (1 - e^{-pT}).$$

Для последующего заметим, что

$$\frac{1}{p^2 + \omega^2} = \frac{1}{\omega^2} \left(1 - \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \right) \div \rightarrow \frac{1}{\omega^2} (1 - \cos \omega t), \\ \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} = \frac{1}{\omega^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^2 + \omega^2} \right) \div \rightarrow \frac{1}{\omega^2} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right)$$

и, значит, по теореме свёртывания:

$$\frac{K(p)}{p^2(p^2 + \omega^2)} = \frac{1}{p} K(p) \frac{1}{p(p^2 + \omega^2)} \div \rightarrow \\ \rightarrow \begin{cases} \frac{1}{\omega^2} \int_0^t f(\tau) \left[t - \tau - \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - \tau) \right] d\tau & \text{при } t < T \\ \frac{1}{\omega^2} \int_0^T f(\tau) \left[t - \tau - \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - \tau) \right] d\tau & \text{„ } t > T. \end{cases}$$

При $t < T$ получаем:

$$\vartheta(t) = \frac{1}{\omega^2} \int_0^t f(\tau) (t - \tau) d\tau - \frac{1}{\omega^2} \int_0^t f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau + x_0 + \\ + x'_0 t + \frac{x''_0}{\omega^2} (1 - \cos \omega t) + \frac{x'''_0}{\omega^2} \left(t - \frac{\sin \omega t}{\omega} \right), \quad (2.76)$$

а при $t > T$, используя теорему запаздывания, найдём:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) = & \frac{t}{\omega^2} \int_0^T f(\tau) d\tau - \frac{1}{\omega^2} \int_0^T f(\tau) \tau d\tau - \\ & - \frac{1}{\omega^3} \int_0^T f(\tau) \sin \omega(t - \tau) d\tau + \\ & + x_0(1 - 1) + x'_0[t - (t - T)] + \\ & + \frac{x''_0}{\omega^2} \{1 - \cos \omega t - [1 - \cos \omega(t - T)]\} + \\ & + \frac{x'''_0}{\omega^2} \left\{ t - \frac{\sin \omega t}{\omega} - \left[(t - T) - \frac{1}{\omega} \sin \omega(t - T) \right] \right\}, \end{aligned}$$

или после упрощений:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) = & \frac{t}{\omega^2} \int_0^T f(\tau) d\tau + \left[x'_0 T + \frac{x'''_0 T}{\omega^2} - \frac{1}{\omega^2} \int_0^T \tau f(\tau) d\tau \right] + \\ & + \sin \omega t \left[\frac{x''_0}{\omega^2} \sin \omega T + \frac{x'''_0}{\omega^3} (\cos \omega T - 1) - \right. \\ & - \left. \frac{1}{\omega^3} \int_0^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau \right] + \cos \omega t \left[\frac{x''_0}{\omega^2} (\cos \omega T - 1) - \right. \\ & - \left. \frac{x'''_0}{\omega^3} \sin \omega T + \frac{1}{\omega^3} \int_0^T f(\tau) \sin \omega \tau d\tau \right]. \quad (2.77) \end{aligned}$$

Периодическое решение может существовать лишь при условии (62):

$$\int_0^T f(\tau) d\tau = 0. \quad (2.78)$$

Предполагая, что это условие соблюдено, далее потребуем, чтобы выражение (77) обращалось в нуль тождественно. Для этого надо приравнять нулю его свободный член, а также коэффициенты при $\cos \omega t$ и $\sin \omega t$. Получаем три уравнения

для определения постоянных x'_0 , x''_0 , x'''_0 . Решив их, получаем:

$$\begin{aligned}x''_0 &= \frac{1}{2\omega} \left(s + c \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} \right), \\x'''_0 &= \frac{1}{2} \left(s \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} - c \right), \\x'_0 &= \frac{1}{\omega^2 T} \int_0^T \tau f(\tau) d\tau - \frac{x'''_0}{\omega^2},\end{aligned}$$

где для краткости записи принято обозначение:

$$\left. \begin{aligned}c &= \int_0^T f(\tau) \cos \omega \tau d\tau, \\s &= \int_0^T f(\tau) \sin \omega \tau d\tau.\end{aligned} \right\} \quad (2.79)$$

Постоянная x_0 остаётся неопределённой. Подстановка в (76) даёт теперь выражение для искомого периодического решения в интервале времени $(0, T)$. Получаем:

$$\begin{aligned}x(t) &= C + \frac{1}{\omega^2} \left[t \int_0^t f(\tau) d\tau - \int_0^t f(\tau) \tau d\tau + \frac{t}{T} \int_0^T \tau f(\tau) d\tau \right] + \\&+ \frac{\cos \omega t}{2\omega^3} \left[2 \int_0^t f(\tau) \sin \omega \tau d\tau - s - c \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} \right] - \\&- \frac{\sin \omega t}{2\omega^3} \left[2 \int_0^t f(\tau) \cos \omega \tau d\tau + s \operatorname{ctg} \frac{\omega T}{2} - c \right], \quad (2.80)\end{aligned}$$

где C — неопределённая постоянная. Нетрудно теперь непосредственным вычислением проверить этот результат, т. е. убедиться, что

$$\begin{aligned}x(0) &= x(T), \quad x'(0) = x'(T), \quad x''(0) = x''(T), \\x'''(0) &= x'''(T).\end{aligned}$$

Действительно, при составлении числителя выражения (89) при $k \neq s$ в определителе (87) были вычеркнуты два диагональных члена, именно: $a_{ks} - p$ и $a_{ss} - p$; поэтому полином $\Delta_{ks}(p)$ имеет степень, не превышающую $n-2$, и степень числителя дроби $\Psi_{ks}(p)$ будет по крайней мере на единицу ниже степени знаменателя. Ввиду этого разложение $\Psi_{ks}(p)$ по степеням $\frac{1}{p}$ не содержит свободного члена и по первой теореме разложения (§ 4) $\psi_{ks}(0) = 0$. Определитель $\Delta_{kk}(p)$ имеет степень $(n-1)$ и его старший член будет $(-p)^{n-1}$, откуда следует, что разложение $\Psi_{kk}(p)$ по степеням $\frac{1}{p}$ начинается со свободного члена, равного единице, и, значит, $\psi_{kk}(0) = 1$.

Таким образом, в таблице начальных функций

$$\left. \begin{array}{ccccccc} \psi_{11}(t), & \psi_{12}(t), & \dots, & \psi_{1n}(t) \\ \psi_{21}(t), & \psi_{22}(t), & \dots, & \psi_{2n}(t) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \psi_{n1}(t), & \psi_{n2}(t), & \dots, & \psi_{nn}(t) \end{array} \right\} \quad (2.91)$$

(первый индекс — номер решения, второй — номер переменной) решение номер k характеризуется тем, что для него начальное значение переменной этого номера равно единице, а начальные значения переменных остальных номеров равны нулю.

Через эту основную систему решений по (88) линейно выражается всякое решение, определяемое произвольно заданными начальными условиями (82):

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^n x_k^0 \psi_{ks}(t). \quad (2.92)$$

Переходим к построению функций $\psi_{ks}(t)$. В первую очередь следует найти корни *характеристического уравнения*

$$\Delta(p) = 0, \quad (2.93)$$

для чего предварительно необходимо развернуть определитель по степеням p .

Рассмотрим простейший случай — все корни $p_1, p_2, \dots, p_n$ характеристического уравнения простые. Воспользовавшись второй теоремой разложения, имеем:

$$\Psi_{ks}(p) = - \sum_{\lambda=1}^n \frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \frac{p}{p-p_\lambda} \quad (2.94)$$

и, значит,

$$\psi_{ks}(t) = - \sum_{\lambda=1}^n \frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} e^{p_\lambda t}. \quad (2.95)$$

Это же решение остаётся верным, если среди корней имеется один, равный нулю ($p_n = 0$):

$$\psi_{ks}(t) = - \left[\frac{\Delta_{ks}(0)}{\Delta'(0)} + \sum_{\lambda=1}^{n-1} \frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} e^{p_\lambda t} \right]. \quad (2.96)$$

На первый взгляд представляется, что для нахождения всех $\psi_{ks}(t)$ необходимо для каждого p_λ вычислить n^2 определителей:

$$\left. \begin{array}{cccc} \Delta_{11}(p_\lambda), & \Delta_{12}(p_\lambda), & \dots, & \Delta_{1n}(p_\lambda) \\ \Delta_{21}(p_\lambda), & \Delta_{22}(p_\lambda), & \dots, & \Delta_{2n}(p_\lambda) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \Delta_{n1}(p_\lambda), & \Delta_{n2}(p_\lambda), & \dots, & \Delta_{nn}(p_\lambda) \end{array} \right\} \quad (2.97)$$

но фактически это вычисление упрощается, так как, поскольку p_λ обращает в нуль определитель (87), то между минорами (97) имеются соотношения вида ¹

$$\Delta_{ks}(p_\lambda) \Delta_{lm}(p_\lambda) = \Delta_{km}(p_\lambda) \Delta_{ls}(p_\lambda) \quad (2.98)$$

или

$$\frac{\Delta_{ks}(p_\lambda)}{\Delta_{ls}(p_\lambda)} = \frac{\Delta_{km}(p_\lambda)}{\Delta_{lm}(p_\lambda)},$$

¹ Л. Я. Окунев, Высшая алгебра. ОНТИ, 1937, стр. 68.

получаем после подстановки в (81):

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^n a_{sk} y_k - \frac{dy_s}{dt} &= e^{p_\lambda t} \left[\sum_{k=1}^n a_{sk} \Delta_{1k}(p_\lambda) - p_\lambda \Delta_{1s}(p_\lambda) \right] = \\ &= e^{p_\lambda t} [a_{s1} \Delta_{11}(p_\lambda) + a_{s2} \Delta_{12}(p_\lambda) + \dots + \\ &+ (a_{ss} - p_\lambda) \Delta_{1s}(p_\lambda) + \dots + a_{sn} \Delta_{1n}(p_\lambda)]. \end{aligned}$$

При $s=1$ величина в скобках равна $\Delta(p_\lambda)$ и, значит, обращается в нуль; при $s \neq 1$ она представляет разложение по минорам первой строки определителя, получающегося из $\Delta(p_\lambda)$ заменой в нём первой строки строкой s , т. е. определителя с двумя одинаковыми строками; но такой определитель также равен нулю, что и доказывает предложение.

3°. Сделаем теперь некоторые замечания, относящиеся к случаю кратных корней. Пусть, например, один из корней будет второй кратности; $p_{n-1} = p_n$. Могут представиться два случая: а) по крайней мере один из миноров первого порядка $\Delta_{ks}(p_n)$ не равен нулю, б) все миноры первого порядка $\Delta_{ks}(p_n)$ равны нулю.

В случае а) множителю $(p - p_n)^2$ полинома $\Delta(p)$ в знаменателе (89) по крайней мере в одном из изображений $\Psi_{ks}(p)$ не соответствует множитель $p - p_n$ в числителе, сокращения не произойдёт, и по второй теореме разложения (§ 4) решение будет содержать не только слагаемые вида $e^{p_n t}$, но и вида $te^{p_n t}$. В случае же б) все полиномы $\Delta_{ks}(p_n)$ содержат множитель $p - p_n$, и по сокращении на этот множитель в знаменатель изображения $\Psi_{ks}(p)$ разность $p - p_n$ войдёт лишь в первой степени, и независимая переменная в общем решении будет стоять под знаком показательных (в частности тригонометрических) функций.

Аналогичные заключения можно сделать в более общем случае: пусть p_m является корнем кратности ν и среди миноров первого порядка $\Delta_{ks}(p_m)$ имеется хотя бы один отличный от нуля.

Тогда решение будет содержать слагаемые вида:

$$\frac{t^{\nu-1}}{(\nu-1)!} e^{p_m t}, \quad \frac{t^{\nu-2}}{(\nu-2)!} e^{p_m t}, \quad \dots, \quad te^{p_m t}, \quad e^{p_m t}.$$

Если все миноры первого порядка обратятся в нуль, но хотя бы один из миноров второго порядка при $p = p_m$ будет отличен от нуля, то $p = p_m$ будет простым (а не кратным) корнем хотя бы одного минора первого порядка (в противном случае все первые производные всех миноров первого порядка по p при $p = p_m$ были бы нулями, а эти производные выражаются линейно через миноры второго порядка, которые по условию не все равны нулю). Для этого минора соответствующее изображение $\Psi_{ks}(p)$ по сокращении числителя и знаменателя на множитель $p - p_m$ будет содержать в знаменателе $(p - p_m)^{\nu-1}$, и в выражение решения системы дифференциальных уравнений войдут слагаемые:

$$\frac{t^{\nu-2}}{(\nu-2)!} e^{p_m t}, \dots, t e^{p_m t}, e^{p_m t}.$$

Это рассуждение можно продолжить и дальше. Пусть при $p = p_m$, являющемся корнем кратности ν , обращаются в нуль все миноры первого, второго, $\dots$, $(\nu-1)$ -го порядка. В числе миноров порядка ν будут отличные от нуля (хотя бы один) — в противном случае производная $\Delta^{(\nu)}(p)$ при $p = p_m$ обратилась бы в нуль (так как она линейно выражается через миноры ν -го порядка), что противоречит условию, что $p = p_m$ есть корень кратности ν , а не более высокой. Для каждого из миноров первого порядка $p = p_m$ будет корнем $(\nu-1)$ кратности, и по сокращении на общий множитель $(p - p_m)^{\nu-1}$ числителя и знаменателя выражения $\Psi_{ks}(p)$ найдём, что начальные функции, соответствующие решению, будут содержать t лишь под знаком показательной (в частности, тригонометрической) функции.

На первый взгляд может показаться, что случай, когда для корня кратности ν обращаются в нуль все миноры первого, второго, $\dots$, $(\nu-1)$ -го порядка, является редким исключением. Однако именно это имеет место в классической задаче о малых движениях консервативной системы около положения равновесия. В решение этой задачи время t входит лишь под знаком тригонометрических функций, на что было указано О. И. Сомовым и К. Вейерштрассом, независимо друг от друга, исправившими ошибку, которую в этом вопросе сделал Лагранж (§ 10).

Ограничимся сказанным относительно случая кратных корней и не будем выписывать соответствующих достаточно громоздких формул, так как в каждом частном случае, разыскивая начальные функции по изображениям (89) с помощью второй теоремы разложения, мы не встретим никаких затруднений и при наличии кратных корней.

4°. Рассмотрим несколько примеров.

1°. Найти основную систему решений системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -7x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -2x - 5y.$$

В данном случае

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -7-p & 1 \\ -2 & -5-p \end{vmatrix} = p^2 + 12p + 37$$

и по (89):

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p) &= \frac{p(5+p)}{p^2 + 12p + 37} = \\ &= \frac{p(p+6) - p}{(p+6)^2 + 1} \xrightarrow{\cdot} e^{-6t}(\cos t - \sin t) = \psi_{11}(t), \end{aligned}$$

$$\Psi_{12}(p) = \frac{-2p}{p^2 + 12p + 37} \xrightarrow{\cdot} -2e^{-6t} \sin t = \psi_{12}(t),$$

$$\Psi_{21}(p) = \frac{p}{p^2 + 12p + 37} \xrightarrow{\cdot} e^{-6t} \sin t = \psi_{21}(t),$$

$$\Psi_{22}(p) = \frac{p(7+p)}{p^2 + 12p + 37} \xrightarrow{\cdot} e^{-6t}(\cos t + \sin t) = \psi_{22}(t).$$

Интеграл Коши для рассматриваемой системы уравнений будет:

$$\begin{aligned} x &= [x_0(\cos t - \sin t) + y_0 \sin t] e^{-6t}, \\ y &= [-2x_0 \sin t + y_0(\cos t + \sin t)] e^{-6t}. \end{aligned}$$

2°. Построить интеграл Коши системы дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = -x + y, \quad \frac{dy}{dt} = -y + 4z, \quad \frac{dz}{dt} = x - 4z.$$

Определитель изображающей системы имеет вид:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -(1+p), & 1, & 0 \\ 0, & -(1+p), & 4 \\ 1, & 0, & -(4+p) \end{vmatrix} = -p(p+3)^2.$$

Находим:

$$\begin{aligned} \Psi_{11}(p) &= \frac{(1+p)(4+p)}{(p+3)^2}, & \Psi_{12}(p) &= \frac{4}{(p+3)^2}, \\ \Psi_{13}(p) &= \frac{1+p}{(p+3)^2}; \\ \Psi_{21}(p) &= \frac{4+p}{(p+3)^2}, & \Psi_{22}(p) &= -\frac{(1+p)(4+p)}{(p+3)^2}, \\ \Psi_{23}(p) &= \frac{1}{(p+3)^2}; \\ \Psi_{31}(p) &= \frac{4}{(p+3)^2}, & \Psi_{32}(p) &= \frac{4(1+p)}{(p+3)^2}, \\ \Psi_{33}(p) &= \frac{(1+p)^2}{(p+3)^2}. \end{aligned}$$

Проверкой может служить то, что при $p=0$ и $p=-3$ отношение элементов двух строк имеет одинаковую величину для всех элементов строки.

Для нахождения начальных функций рассмотрим изображение более общего вида:

$$\begin{aligned} \frac{ap^2 + bp + c}{(p + \alpha)^2} &= \frac{ap^2 + \alpha ap + \left(b - \alpha a - \frac{c}{\alpha}\right)p + \frac{c}{\alpha}(p + \alpha)}{(p + \alpha)^2} = \\ &= \frac{ap}{p + \alpha} + \left(b - \alpha a - \frac{c}{\alpha}\right) \frac{p}{(p + \alpha)^2} + \frac{c}{\alpha^2} \left(1 - \frac{p}{p + \alpha}\right) \end{aligned}$$

и по III табл. 2 получим:

$$\begin{aligned} \frac{ap^2 + bp + c}{(p + \alpha)^2} &\rightarrow \\ &\rightarrow ae^{-\alpha t} + \left(b - \alpha a - \frac{c}{\alpha}\right) te^{-\alpha t} + \frac{c}{\alpha^2} (1 - e^{-\alpha t}). \end{aligned}$$

Пользуясь этим соотношением, найдём $\psi_{ks}(t)$ и далее интеграл Коши:

$$x = x_0 \left(\frac{5}{9} e^{-3t} + \frac{2}{3} t e^{-3t} + \frac{4}{9} \right) + y_0 \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9} e^{-3t} - \frac{1}{3} t e^{-3t} \right) + \\ + z_0 \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9} e^{-3t} - \frac{4}{3} t e^{-3t} \right);$$

$$y = x_0 \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9} e^{-3t} - \frac{4}{3} t e^{-3t} \right) + y_0 \left(\frac{5}{9} e^{-3t} + \frac{4}{9} + \frac{2}{3} t e^{-3t} \right) + \\ + z_0 \left(\frac{4}{9} - \frac{4}{9} e^{-3t} + \frac{8}{3} t e^{-3t} \right);$$

$$z = x_0 \left(-\frac{1}{9} e^{-3t} + \frac{1}{9} + \frac{2}{3} t e^{-3t} \right) + \\ + y_0 \left(\frac{1}{9} - \frac{1}{9} e^{-3t} - \frac{1}{3} t e^{-3t} \right) + z_0 \left(\frac{8}{9} e^{-3t} + \frac{1}{9} - \frac{4}{3} t e^{-3t} \right).$$

Наличие кратного корня ни в какой мере не затруднило хода вычислений.

§ 10. Малые колебания материальной системы вокруг положения устойчивого равновесия ¹

1°. Обозначим через q_i ($i = 1, 2, \dots, n$) обобщённые координаты системы, отсчитываемые от положения устойчивого равновесия, через $\dot{q}_i$ — обобщённые скорости. Выражения кинетической и потенциальной энергии системы будут:

$$T = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{ik} \dot{q}_i \dot{q}_k, \quad \Pi = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n c_{ik} q_i q_k,$$

где инерционные и квазиупругие коэффициенты a_{ik} и c_{ik} при рассмотрении малых движений считаются постоянными; T и Π являются знакоопределёнными положительными функциями своих аргументов $\dot{q}_k$ и соответственно q_k .

Подставляя T и Π в уравнения движения в лагранжевой форме*

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0, \quad (2.103)$$

¹ См., например, Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Курс теоретической механики, т. II, §§ 165—166, Гостехиздат, 1948.

имеем

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} \dot{q}_k) = 0 \quad (i = 1, 2, \dots, n). \quad (2.104)$$

Ищется интеграл Коши, т. е. решение, удовлетворяющее начальным условиям

$$q_i = q_i^0, \quad \dot{q}_i = \dot{q}_i^0 \quad \text{при} \quad t = 0. \quad (2.105)$$

Изображающая система уравнений будет:

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} p^2 + c_{ik}) Q_k(p) = \sum_{k=1}^n a_{ik} (p^2 q_k^0 + p \dot{q}_k^0), \quad (2.106)$$

где $Q_k(p) \rightarrow q_k(t)$. Её определитель имеет вид:

$$\Delta(p^2) = \begin{vmatrix} a_{11}p^2 + c_{11} & a_{12}p^2 + c_{12} & \dots & a_{1n}p^2 + c_{1n} \\ a_{21}p^2 + c_{21} & a_{22}p^2 + c_{22} & \dots & a_{2n}p^2 + c_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_{n1}p^2 + c_{n1} & a_{n2}p^2 + c_{n2} & \dots & a_{nn}p^2 + c_{nn} \end{vmatrix}. \quad (2.107)$$

Важно заметить, что в рассматриваемом случае $a_{ik} = a_{ki}$, $c_{ik} = c_{ki}$. Поэтому и миноры определителя (107) имеют это свойство симметрии $\Delta_{ik}(p^2) = \Delta_{ki}(p^2)$.

В курсах теоретической механики доказывается, что, вследствие симметричности определителя, уравнение $\Delta(p^2) = 0$ имеет (относительно p^2) все корни вещественные и отрицательные (при рассмотрении движения около состояния устойчивого равновесия). Пусть $-p_1^2, -p_2^2, \dots, -p_n^2$ будут эти корни (считаем пока их различными). Через $\Delta_k(p^2)$ обозначим определитель, получающийся из $\Delta(p^2)$ путём вычеркивания k первых строк и k первых столбцов. Можно доказать, что между двумя последовательными корнями $\Delta_{k-1}(p^2)$ лежит один корень $\Delta_k(p^2)$; в частности, между двумя корнями $\Delta_0(p^2) = \Delta(p^2)$ лежит корень $\Delta_1(p^2)$.

2°. Допустим теперь, что уравнение $\Delta(p^2) = 0$ имеет корень $-p_s^2$ кратности ν . Этот случай можно рассматривать как предельный; между каждой парой корней $(-p_s^2, -p_{s+1}^2), (-p_{s+1}^2, -p_{s+2}^2), \dots, (-p_{s+\nu-2}^2, -p_{s+\nu-1}^2)$

лежит один корень $\Delta_1(p^2)$, т. е. всего $(\nu - 1)$ корней. Когда в пределе указанные корни станут равными друг другу, то $-p_s^2$ будет корнем кратности $\nu - 1$ для $\Delta_1(p^2)$. Сказанное справедливо не только для минора $\Delta_1(p^2) = \Delta_{11}(p^2)$, но и для любого диагонального минора $\Delta_{ii}(p^2)$, так как строки и столбцы можно располагать в таком порядке, чтобы диагональный минор $\Delta_{ii}(p^2)$ стал на место $\Delta_1(p^2)$. Но из (98) следует, что для каждого корня $p^2 = -p_s^2$:

$\Delta_{ii}(-p_s^2)\Delta_{kk}(-p_s^2) = \Delta_{ik}(-p_s^2)\Delta_{ki}(-p_s^2) = [\Delta_{ik}(-p_s^2)]^2$, откуда следует, что $-p_s^2$ является корнем кратности $\nu - 1$ любого первого минора.

Решая изображающую систему уравнений (106), получим:

$$Q_s(p) = \sum_{k=1}^n (p^2 q_k^0 + p \dot{q}_k^0) \sum_{m=1}^n a_{mk} \frac{\Delta_{ms}(p^2)}{\Delta(p^2)}. \quad (2.108)$$

После сокращения $\frac{\Delta_{ms}(p^2)}{\Delta(p^2)}$ на общий множитель $(p^2 + p_\alpha^2)^{\nu-1}$ знаменатель будет содержать лишь множители вида $(p^2 + p_\alpha^2)$, и в решение независимая переменная t войдёт лишь под знаком тригонометрических функций.

3°. Напишем решение в предположении, что все корни — простые; разложение на простейшие дроби берём в виде:

$$\frac{\Delta_{ms}(p^2)}{\Delta(p^2)} = \frac{A_1}{p^2 + p_1^2} + \frac{A_2}{p^2 + p_2^2} + \dots + \frac{A_n}{p^2 + p_n^2}. \quad (2.109)$$

Умножая на $(p^2 + p_\alpha^2)$ и полагая затем $p^2 = -p_\alpha^2$, получим:

$$A_\alpha = \lim_{p^2 \rightarrow -p_\alpha^2} \frac{\Delta_{ms}(p^2)(p^2 + p_\alpha^2)}{\Delta(p^2)} = \frac{\Delta_{ms}(-p_\alpha^2)}{\left(\frac{d\Delta(z)}{dz}\right)_{z=-p_\alpha^2}}. \quad (2.110)$$

Тогда

$$Q_s(p) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_{mk} \frac{\Delta_{ms}(-p_\alpha^2)}{[\Delta'(z)]_{z=-p_\alpha^2}} \times \\ \times \left(q_k^0 \frac{p^2}{p^2 + p_\alpha^2} + \dot{q}_k^0 \frac{p}{p^2 + p_\alpha^2} \right). \quad (2.111)$$

Переход к начальным функциям даёт ($s = 1, 2, \dots, n$)

$$q_s(t) = \sum_{\alpha=1}^n \sum_{k=1}^n \sum_{m=1}^n a_{mk} \frac{\Delta_{ms}(-p_\alpha^2)}{[\Delta'(z)]_{z=-p_\alpha^2}} \times \\ \times \left(q_k^0 \cos p_\alpha t + \frac{\dot{q}_k^0}{p_\alpha} \sin p_\alpha t \right). \quad (2.112)$$

4°. При наличии рассеяния энергии в случае кратных корней в решения задачи о малых колебаниях войдут слагаемые, содержащие t вне знака показательных функций. Для иллюстрации приведём пример: пусть кинетическая энергия, потенциальная энергия и диссипативная функция¹ заданы выражениями:

$$T = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + \dot{q}_2^2), \quad \Pi = \frac{1}{2} (q_1^2 + 2q_1 q_2 + 3q_2^2), \\ \Phi = \frac{1}{2} (\dot{q}_1^2 + 3\dot{q}_2^2).$$

Дифференциальные уравнения движения

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} + \frac{\partial \Phi}{\partial \dot{q}_i} + \frac{\partial \Pi}{\partial q_i} = 0$$

в рассматриваемом случае будут:

$$\ddot{q}_1 + \dot{q}_1 + q_1 + q_2 = 0, \quad \ddot{q}_2 + 3\dot{q}_2 + q_1 + 3q_2 = 0.$$

Соответствующая изображающая система будет:

$$(p^2 + p + 1) Q_1(p) + Q_2(p) = p \dot{q}_1^0, \\ Q_1(p) + (p^2 + 3p + 3) Q_2(p) = 0,$$

причём для сокращения выкладок мы приняли $q_1^0 = q_2^0 = \dot{q}_2^0 = 0$.

Характеристическое уравнение будет

$$\Delta(p) = (p^2 + p + 1)(p^2 + 3p + 3) - 1 = \\ = (p^2 + 2p + 2)(p + 1)^2.$$

¹ Л. Г. Лойцянский и А. И. Лурье, Курс теоретической механики, II, § 159, Гостехиздат, 1948.

Оно имеет двукратный корень $p = -1$. Далее находим:

$$Q_1(p) = \dot{q}_1^0 \frac{p(p^2 + 3p + 3)}{(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)},$$

$$Q_2(p) = \dot{q}_1^0 \frac{p}{(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)}.$$

Имеем разложения на простейшие дроби:

$$\frac{p^2 + 3p + 3}{(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{1}{(p+1)^2} + \frac{1}{p+1} - \frac{p+1}{p^2 + 2p + 2},$$

$$\frac{1}{(p+1)^2(p^2 + 2p + 2)} = \frac{1}{(p+1)^2} - \frac{1}{p^2 + 2p + 2}$$

и, следовательно:

$$Q_1(p) = \dot{q}_1^0 \left[\frac{p}{(p+1)^2} + \frac{p}{p+1} - \frac{p(p+1)}{p^2 + 2p + 2} \right] \div \rightarrow \\ \div \rightarrow \dot{q}_1^0 (te^{-t} + e^{-t} - e^{-t} \cos t),$$

$$Q_2(p) = \dot{q}_1^0 \left[\frac{p}{(p+1)^2} - \frac{p}{p^2 + 2p + 2} \right] \div \rightarrow \dot{q}_1^0 (te^{-t} - e^{-t} \sin t).$$

То обстоятельство, что при наличии кратных корней в решении уравнений малых колебаний консервативной системы время t вошло лишь под знаком тригонометрических функций, конечно, не случайно: рассматриваются движения около состояния устойчивого равновесия, и отклонения системы должны быть ограниченными; поэтому слагаемые вида $t^k \frac{\cos}{\sin} p_\alpha t$ должны отсутствовать. При наличии рассеяния энергии корни характеристического уравнения имеют отрицательные вещественные части, и присутствие (в случае кратных корней) в решениях членов вида $t^k e^{-\alpha t} \frac{\cos}{\sin} \beta t$, стремящихся к нулю при $t \rightarrow \infty$, не приводит к противоречию с предположением об устойчивости состояния равновесия.

§ 11. Составление характеристического уравнения по методу А. Н. Крылова ¹

1°. При вычислениях значительную трудность представляет процесс раскрытия определителя (87). Если, например, $n = 5$, то определитель содержит $5! = 120$ слагаемых, и раскрытие его надо вести алгебраически, так как буква p расположена на главной диагонали; поэтому даже при численном задании коэффициентов a_{ik} дело не сводится к вычислению только числовых определителей.

Последнего можно достичь, решая изображающую систему путем исключения неизвестных. Будем из системы (86) определять неизвестную $X_1(p)$. Имеем при $k = 1, 2, \dots, n$:

$$pX_k(p) = px_k^0 + \sum_{j=1}^n a_{kj}X_j(p) \quad (2.113)$$

и, в частности,

$$pX_1(p) = px_1^0 + \sum_{j=1}^n a_{1j}X_j(p). \quad (2.114)$$

Умножая обе части (114) на p и воспользовавшись для замены $pX_j(p)$ уравнениями (113), получим:

$$p^2X_1(p) = p^2x_1^0 + p \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j^0 + \sum_{j=1}^n a_{1j}^{(2)}X_j(p). \quad (2.115)$$

Здесь для краткости написано

$$a_{1s}^{(2)} = \sum_{j=1}^n a_{1j}a_{js} = a_{11}a_{1s} + a_{12}a_{2s} + \dots + a_{1n}a_{ns}, \quad (2.116)$$

после чего индекс s заменён на j . Повторяя этот процесс, получим:

$$\begin{aligned} p^3X_1(p) = p^3x_1^0 + p^2 \sum_{j=1}^n a_{1j}x_j^0 + p \sum_{j=1}^n a_{1j}^{(2)}x_j^0 + \\ + \sum_{j=1}^n a_{1j}^{(3)}X_j(p), \end{aligned} \quad (2.117)$$

¹ См. примечание на стр. 102.

Решив остающиеся $(n-1)$ уравнений, найдём из них $X_2(p), \dots, X_n(p)$, причём вычисление опять-таки сведётся к нахождению только числовых определителей. Разыскание начальных функций, после того как получены изображения $X_1(p), X_2(p), \dots, X_n(p)$ и найдены корни уравнения $D(p)=0$, проводится по второй теореме разложения.

2°. Определитель $D(p)$ может оказаться равным нулю тождественно, если характеристическое уравнение (93) имеет кратные корни. Это будет иметь место, когда при наличии кратных корней в общее решение системы дифференциальных уравнений (81) независимая переменная входит лишь под знаком показательных функций, например, в задаче о малых колебаниях консервативной системы. Решение задачи по указанному здесь методу в таких случаях не только не усложняется, но даже упрощается. Тогда исключение неизвестных нужно производить не из всей системы n уравнений (119), из коих одно или несколько являются теперь следствием остальных, а из меньшего числа их.

Приведём, следуя А. Н. Крылову, один пример. Найти решение системы дифференциальных уравнений

$$\left. \begin{aligned} \frac{dx_1}{dt} &= 5x_1 + 30x_2 - 48x_3 \\ \frac{dx_2}{dt} &= 3x_1 + 14x_2 - 24x_3 \\ \frac{dx_3}{dt} &= 3x_1 + 15x_2 - 25x_3 \end{aligned} \right\} \quad (2.127)$$

при начальных условиях: $x_1 = x_1^0, x_2^0 = x_3^0 = 0$ при $t=0$. Изображающая система будет:

$$\left. \begin{aligned} pX_1(p) &= px_1^0 + 5X_1(p) + 30X_2(p) - 48X_3(p), \\ pX_2(p) &= 3X_1(p) + 14X_2(p) - 24X_3(p), \\ pX_3(p) &= 3X_1(p) + 15X_2(p) - 25X_3(p). \end{aligned} \right\} \quad (2.128)$$

Составляем второе уравнение (119):

$$\begin{aligned} p^2 X_1(p) &= p^2 x_1^0 + 5 [px_1^0 + 5X_1(p) + 30X_2(p) - 48X_3(p)] + \\ &+ 30 [3X_1(p) + 14X_2(p) - 24X_3(p)] - \\ &- 48 [3X_1(p) + 15X_2(p) - 25X_3(p)] \end{aligned}$$

или

$$p^2 X_1(p) = (p^2 + 5p) x_1^0 - 29X_1(p) - 150X_2(p) + 240X_3(p).$$

Таким же способом находим третье уравнение (119):

$$p^3 X_1(p) = (p^3 + 5p^2 - 29p) x_1^0 + 125X_1(p) + 630X_2(p) + 1008X_3(p).$$

Итак, получена система трех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (5-p)X_1(p) + 30X_2(p) - 48X_3(p) &= -px_1^0, \\ -(29+p^2)X_1(p) - 150X_2(p) + 240X_3(p) &= -(p^2+5p)x_1^0, \\ (125-p^3)X_1(p) + 630X_2(p) - 1008X_3(p) &= -(p^2+5p-29p)x_1^0. \end{aligned} \right\} \quad (2.129)$$

Её определитель

$$\begin{aligned} D(p) &= \begin{vmatrix} 5-p, & 30, & -48 \\ -29-p^2, & -150, & 240 \\ 125-p^3, & 630, & -1008 \end{vmatrix} = \\ &= -30 \cdot 48 \begin{vmatrix} 5-p, & 1, & 1 \\ -29-p^2, & -5, & -5 \\ 125-p^3, & 21, & 21 \end{vmatrix} \end{aligned}$$

тождественно (независимо от p) обращается в нуль. Это является следствием того, что $X_2(p)$ и $X_3(p)$ входят в уравнения (129) в одной и той же комбинации

$$X_2^*(p) = 30X_2(p) - 48X_3(p). \quad (2.130)$$

Взяв два первых уравнения (129), получаем:

$$\begin{aligned} (5-p)X_1(p) + X_2^*(p) &= -px_1^0, \\ -(29+p^2)X_1(p) - 5X_2^*(p) &= -(p^2+5p)x_1^0, \end{aligned}$$

откуда найдём

$$X_1(p) = x_1^0 \frac{p^2 + 10p}{p^2 + 5p + 4}; \quad X_2^*(p) = -x_1^0 \frac{54p}{p^2 + 5p + 4}.$$

Для определения $X_2(p)$ и $X_3(p)$ используем (130) и второе уравнение (128); получаем:

$$\begin{aligned} 30X_2 - 48X_3 &= -x_1^0 \frac{54p}{p^2 + 5p + 4}, \\ (14 - p)X_2 - 24X_3 &= -x_1^0 \frac{3(p^2 + 10p)}{p^2 + 5p + 4}, \end{aligned}$$

откуда

$$X_2(p) = X_3(p) = \frac{3p}{p^2 + 5p + 4} x_1^0.$$

Остаётся найти начальные функции:

$$\begin{aligned} X_1(p) &= x_1^0 \frac{p^2 + 10p}{(p+4)(p+1)} = \\ &= x_1^0 \left(\frac{3p}{p+1} - \frac{2p}{p+4} \right) \rightarrow x_1^0 (3e^{-t} - 2e^{-4t}), \\ X_2(p) = X_3(p) &= \frac{3p}{p^2 + 5p + 4} x_1^0 = \\ &= x_1^0 \left(\frac{p}{p+1} - \frac{p}{p+4} \right) \rightarrow x_1^0 (e^{-t} - e^{-4t}). \end{aligned}$$

То обстоятельство, что определитель системы (129) обратился тождественно в нуль, не случайно. Определитель системы (128), записанный в обычной форме (87), в данном случае будет:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} 5-p, & 30, & -48 \\ 3, & 14-p, & -24 \\ 3, & 5, & -25-p \end{vmatrix}$$

и, значит,

$$\Delta(-1) = \begin{vmatrix} 6, & 30, & -48 \\ 3, & 15, & -24 \\ 3, & 5, & -24 \end{vmatrix} = -2 \cdot 3 \cdot 15 \cdot 24 \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix},$$

т. е. двукратный корень $p = -1$ определителя $\Delta(p)$ обращает в нуль все его первые миноры, что объясняет, почему в вышеприведённое решение t не вошло как множитель перед показательными функциями. Уравнение же $D(p) = 0$ не может

иметь кратных корней, ибо, если такие корни имеются в случае *одного* дифференциального уравнения n -го порядка, то t обязательно входит в решение как указанный множитель, в чём и заключается коренное различие между системой n уравнений первого порядка и одним уравнением n -го порядка. Поэтому, если из системы уравнений (127) исключить x_2 и x_3 , то дифференциальное уравнение для x_1 должно иметь не третий порядок, а второй. У нас и получилось, что исключение неизвестных $X_2(p)$ и $X_3(p)$ было сделано из двух уравнений (129), а не из трёх, это и снизило степень $D(p)$ на единицу, что как раз соответствует потере одной кратности корня $p = -1$ уравнения $\Delta(p) = 0$. Мы ограничимся приведением этого примера, так как подробное выяснение всех возможных здесь случаев достаточно сложно.¹

Заметим в заключение, что практически весьма удобный приём вычисления определителя $\Delta(p)$ предложен Ш. Е. Микеладзе.²

§ 12. Интегралы от произведений решений

1°. В этом параграфе рассматривается следующая задача: дана система дифференциальных уравнений (81). Пусть $x_s(t)$ — решение этой системы ($s = 1, 2, \dots, n$), удовлетворяющее начальным условиям (82). Требуется определить численное значение интегралов

$$J_{s\sigma} = J_{\sigma s} = \int_0^{\infty} x_s(t) x_{\sigma}(t) dt \quad (2.131)$$

($s, \sigma = 1, 2, \dots, n$). Предполагается, конечно, что эти интегралы сходятся; это будет иметь место, если все корни характеристического уравнения (93) имеют отрицательные вещественные части, т. е. коэффициенты этого уравнения удовлетворяют условиям Раута — Гурвица.

Решение этой задачи имеет важное применение в теории автоматического регулирования для построения критериев

¹ В. В. Степанов, Курс дифференциальных уравнений. Гостехиздат, 1940, стр. 274—277.

² Ш. Е. Микеладзе, Некоторые задачи строительной механики. Гостехиздат, 1948, стр. 256.

оценки качества переходных процессов в регулируемых системах¹.

Прямой путь решения состоит в следующем:² сложим s -ое уравнение системы (81), умноженное на $x_\sigma(t)$, с уравнением для $x_\sigma(t)$, умноженным на $x_s(t)$. Тогда

$$\begin{aligned} x_\sigma \frac{dx_s}{dt} + x_s \frac{dx_\sigma}{dt} &= \frac{d}{dt}(x_s x_\sigma) = \\ &= (a_{s1}x_\sigma + a_{\sigma 1}x_s)x_1 + \dots + (a_{sn}x_\sigma + a_{\sigma n}x_s)x_n. \end{aligned}$$

Интегрируя это соотношение по t в пределах $(0, \infty)$ и замечая, что

$$\int_0^\infty \frac{d}{dt}(x_s x_\sigma) dt = -x_s^0 x_\sigma^0, \quad (2.132)$$

так как по условию $x_s(\infty) = x_\sigma(\infty) = 0$, получаем по (131)

$$a_{s1}J_{\sigma 1} + a_{\sigma 1}J_{s1} + \dots + a_{sn}J_{\sigma n} + a_{\sigma n}J_{sn} = -x_s^0 x_\sigma^0, \quad (2.133)$$

где $s = 1, 2, \dots, n$; $\sigma = 1, 2, \dots, n$. Остаётся решить эту систему $\frac{1}{2}n(n+1)$ линейных уравнений относительно такого же числа неизвестных (131). Это вычисление весьма громоздко, например, при $n=3$ приходится решать совместную систему шести уравнений, при $n=4$ — десяти уравнений и т. д. Поэтому ниже излагается другой способ решения поставленной задачи, приводящий к цели менее прямым путем, но требующий в конечном счете более простых вычислений.³

¹ См. А. А. Фельдбаум. Интегральные критерии качества регулирования. Журнал „Автоматика и телемеханика“, IX, № 1, 1948, стр. 3—19.

² См. Я. В. Балкинд, Количественные характеристики асимптотической устойчивости самолёта. Записки семинара по устойчивости движения, № 4, 1948, изд. Военно-воздушной акад. им. Н. Е. Жуковского.

³ См. также Б. В. Булгаков, Колебания, т. I, Гостехиздат, 1949, стр. 188.

Подставим в (131) вместо $x_s(t)$ его значение по (92) и (95):

$$\begin{aligned} J_{s\sigma} &= - \int_0^{\infty} x_{\sigma}(t) \sum_{k=1}^n \sum_{\lambda=1}^n x_k^0 \frac{\Delta_{ks}(p_{\lambda})}{\Delta'(p_{\lambda})} e^{p_{\lambda} t} dt = \\ &= - \sum_{k=1}^n x_k^0 \sum_{\lambda=1}^n \frac{\Delta_{ks}(p_{\lambda})}{\Delta'(p_{\lambda})} \int_0^{\infty} e^{p_{\lambda} t} x_{\sigma}(t) dt. \end{aligned} \quad (2.134)$$

Но по определению изображения имеем:

$$\frac{X_{\sigma}(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} x_{\sigma}(t) dt,$$

где $\operatorname{Re} p > 0$; поскольку в нашем случае по условию $\operatorname{Re} p_{\lambda} < 0$, то можно написать

$$- \frac{X_{\sigma}(-p_{\lambda})}{p_{\lambda}} = \int_0^{\infty} e^{p_{\lambda} t} x_{\sigma}(t) dt. \quad (2.135)$$

Воспользовавшись теперь значением $X_{\sigma}(p)$ по (88), получим:

$$\int_0^{\infty} e^{p_{\lambda} t} x_{\sigma}(t) dt = \sum_{j=1}^n x_j^0 \frac{\Delta_{j\sigma}(-p_{\lambda})}{\Delta(-p_{\lambda})}, \quad (2.136)$$

а подстановка в (134) даёт:

$$J_{s\sigma} = - \sum_{k=1}^n \sum_{j=1}^n x_k^0 x_j^0 \sum_{\lambda=1}^n \frac{\Delta_{ks}(p_{\lambda}) \Delta_{j\sigma}(-p_{\lambda})}{\Delta(-p_{\lambda}) \Delta'(p_{\lambda})} \quad (2.137)$$

и дело сводится к вычислению сумм

$$S_{kj s\sigma} = - \sum_{\lambda=1}^n \frac{\Delta_{ks}(p_{\lambda}) \Delta_{j\sigma}(-p_{\lambda})}{\Delta(-p_{\lambda}) \Delta'(p_{\lambda})}. \quad (2.138)$$

Вспоминая, что

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^n x_k^0 \psi_{ks}(t),$$

легко видеть из (131), что

$$S_{kjs\sigma} = \int_0^{\infty} \psi_{ks}(t) \psi_{j\sigma}(t) dt,$$

где $\psi_{ks}(t)$ — функции, образующие основную систему решений (§ 9).

2°. Вычисление по (138) не составляет труда, если корни характеристического уравнения (93) известны численно. Но для задач теории автоматического регулирования представляет интерес изучить влияние изменения параметров системы, т. е. коэффициентов a_{ik} в уравнениях (81), на движение её. Поэтому возникает задача выразить суммы (138) в общем алгебраическом виде через коэффициенты определителя $\Delta(p)$ и его первых миноров. Будем обозначать:

$$(-1)^n \Delta(p) = p^n - f_1 p^{n-1} + f_2 p^{n-2} - \dots + (-1)^n f_n, \quad (2.139)$$

$$\begin{aligned} Q(p) &= -\Delta_{ks}(p) \Delta_{j\sigma}(-p) = \\ &= g_0 p^{2n-2} + g_1 p^{2n-3} + \dots + g_{2n-2}, \end{aligned} \quad (2.140)$$

так как степень первого минора не превышает $n-1$. Чтобы облегчить последующие ссылки, соберём ещё здесь формулы (1.77), (18) и (48), выведенные выше:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^s}{\Delta'(p_{\lambda})} &= 0 & (s=0, 1, 2, \dots, n-2), \\ \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^{n-1}}{\Delta'(p_{\lambda})} &= (-1)^n, \\ \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^n}{\Delta'(p_{\lambda})} &= (-1)^n f_1, \\ \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^{n+1}}{\Delta'(p_{\lambda})} &= (-1)^n (f_1^2 - f_2), \\ \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^{n+2}}{\Delta'(p_{\lambda})} &= (-1)^n (f_1^3 - 2f_1 f_2 + f_3), \end{aligned} \right\} \quad (2.114)$$

$$\left. \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_\lambda^{n+3}}{\Delta'(p_\lambda)} &= (-1)^n (f_1^4 - 3f_1^2 f_2 + 2f_1 f_3 + f_2^2 - f_4) \text{ и т. д.} \\ \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{p_\lambda \Delta'(p_\lambda)} &= -\frac{1}{f_n} \cdot^1 \end{aligned} \right\} \quad (2.141)$$

При выводе этих формул в § 7 левая часть характеристического уравнения записывалась в форме (5), тогда как здесь она имеет вид (139), чем объясняется наличие в (141) множителя $(-1)^n$. Итак, речь идёт о вычислении сумм

$$S = \sum_{\lambda=1}^n \frac{Q(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda) \Delta(-p_\lambda)}. \quad (2.142)$$

Ниже будет доказано, что суммы вида

$$\sum_{\lambda=1}^n \frac{p_\lambda^{2k+1}}{\Delta'(p_\lambda) \Delta(-p_\lambda)}$$

при $k=0, 1, \dots, n-2$ обращаются в нуль. Поэтому при вычислении S в полиноме $Q(p_\lambda)$, стоящем в числителе (142), можно вычеркнуть слагаемые, содержащие нечётные степени p_λ , и писать, вместо (140):

$$Q(p) = g_0 p^{2n-2} + g_2 p^{2n-4} + \dots + g_{2n-2}. \quad (2.140')$$

Мы имеем

$$\Delta(p) = (p_1 - p)(p_2 - p) \dots (p_n - p) \quad (2.143)$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta(-p_\lambda) &= (p_1 + p_\lambda)(p_2 + p_\lambda) \dots (p_n + p_\lambda) = \\ &= 2p_\lambda \prod_{\sigma=1}^n{}^* (p_\sigma + p_\lambda), \end{aligned} \quad (2.144)$$

где звёздочка при знаке произведения указывает на пропуск множителя, для которого $\sigma = \lambda$.

¹ В § 33,6² приведены формулы для сумм

$$\sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{p_\lambda^s \Delta'(p_\lambda)} \quad (s=2, 3, \dots).$$

Введём в рассмотрение *произведение сумм пар корней полинома* $\Delta(p)$:

$$R = (p_1 + p_2)(p_1 + p_3) \dots (p_1 + p_n) \times \\ \times (p_2 + p_3) \dots (p_2 + p_n) \times \\ \dots \times (p_{n-1} + p_n). \quad (2.145)$$

Произведение

$$R_1 = (p_2 + p_3)(p_2 + p_4) \dots (p_2 + p_n) \times \\ \times (p_3 + p_4) \dots (p_3 + p_n) \times \\ \dots \times (p_{n-1} + p_n) \quad (2.146)$$

может быть, очевидно, получено из (145), если в последнем произведении вычеркнуть все множители, содержащие p_1 . Аналогичное значение имеет обозначение R_λ : это *произведение получается из R , если в последнем зачеркнуть множители, содержащие p_λ* .

Выше указано, что R есть произведение сумм корней полинома $\Delta(p)$, взятых попарно; очевидно, что R_λ представляет аналогичное произведение взятых попарно сумм корней полинома (143), если в последнем вычеркнуть множитель $p_\lambda - p$, т. е. полинома $\frac{\Delta(p)}{p_\lambda - p}$.

В развёрнутом виде этот полином запишется так:¹

$$(-1)^{n-1} \frac{\Delta(p)}{p_\lambda - p} = p^{n-1} + f_1(p_\lambda) p^{n-2} + \\ + f_2(p_\lambda) p^{n-3} + \dots + f_{n-1}(p_\lambda), \quad (2.147)$$

где введены обозначения ($\mu = 1, 2, \dots, n-1$):

$$f_\mu(p_\lambda) = p_\lambda^\mu - f_1 p_\lambda^{\mu-1} + f_2 p_\lambda^{\mu-2} - \dots + (-1)^\mu f_\mu. \quad (2.148)$$

Выражение для сумм S теперь записывается так:

$$S = \frac{1}{2R} \sum_{\lambda=1}^n \frac{Q(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda) p_\lambda} R_\lambda. \quad (2.149)$$

¹ А. К. Сушкевич, Основы высшей алгебры. ОНТИ, 1937, стр. 227.

3°. Дальнейшее вычисление можно вести так. Произведение R представляет *целую рациональную симметрическую функцию от корней полинома* (139), так как его выражение (145) не меняется при любой перестановке букв $p_1, p_2, \dots, p_n$. Но из высшей алгебры известно, что всякая такая функция представляется, и притом только единственным образом, как целая рациональная функция от так называемых элементарных симметрических функций, т. е. коэффициентов $f_1, f_2, \dots, f_n$ полинома $\Delta(p)$:

$$\begin{aligned} f_1 &= \sum p_\lambda, & f_2 &= \sum p_\lambda p_\mu, & f_3 &= \sum p_\lambda p_\mu p_\nu, \dots, \\ f_n &= p_1 p_2 p_3 \dots p_n. \end{aligned} \quad (2.150)$$

Итак,

$$R = R(f_1, f_2, \dots, f_n). \quad (2.151)$$

Сказанное можно повторить и в отношении величины R_λ , являющейся симметрической функцией корней $p_1, p_2, \dots, p_{\lambda-1}, p_{\lambda+1}, \dots, p_n$ полинома (147). Поэтому R_λ может быть представлена целой рациональной функцией коэффициентов этого полинома:

$$R_\lambda = R_\lambda [f_1(p_\lambda), f_2(p_\lambda), \dots, f_{n-1}(p_\lambda)]$$

или, имея в виду (147),

$$R_\lambda = R_\lambda (f_1, f_2, \dots, f_{n-1}, p_\lambda). \quad (2.152)$$

Числитель выражения (149) под знаком суммы в результате оказывается полиномом от p_λ с коэффициентами, зависящими от $g_0, g_1, \dots, g_{2n-2}$ и $f_1, f_2, \dots, f_{n-1}$. Остаётся воспользоваться формулами суммирования (141), чтобы найти окончательное выражение S через $f_1, f_2, \dots, f_n, g_0, g_1, \dots, g_{n-2}$ — это будет некоторая дробная рациональная функция этих коэффициентов, т. е., в конечном счете, коэффициентов a_{ik} системы (81).

Ход вычисления покажем для случаев $n=3$ и $n=4$.

а) $n=3$. Имеем полином

$$f(p) = p^3 - f_1 p^2 + f_2 p - f_3. \quad (2.153)$$

Требуется выразить произведение

$$R = (p_1 + p_2)(p_1 + p_3)(p_2 + p_3) \quad (2.154)$$

через f_1, f_2, f_3 . Заметим, что R является однородной функцией третьей степени от p_1, p_2, p_3 , причём степень каждой из переменных в R не превышает двух. Это даёт основание утверждать, что R может быть выражена линейно только через произведение $f_1 f_2$ и через f_3 :

$$R = A f_1 f_2 + B f_3,$$

причём постоянные A и B не зависят от f_1, f_2, f_3 , т. е. от вида полинома. Но слагаемое $p_1^2 p_2$ входит в (154) с коэффициентом 1; поэтому $A = 1$. Далее возьмём полином

$$(p-1)^3 = p^3 - 3p^2 + 3p - 1,$$

для которого $f_1 = 3, f_2 = 3, f_3 = 1$ и $p_1 = p_2 = p_3 = 1$. При этих численных данных

$$R = 2^3 = 9 + B, \text{ т. е. } B = -1$$

и, значит,

$$R = f_1 f_2 - f_3. \quad (2.155)$$

Перейдём к вычислению R_λ . Заметим, что для полинома второй степени

$$r(p) = p^2 - r_1 p + r_2$$

имеем, конечно,

$$R = p_1 + p_2 = r_1. \quad (2.156)$$

Но при $n = 3$

$$\frac{f(p)}{p - p_\lambda} = p^2 + (p_\lambda - f_1)p + (p_\lambda^2 - f_1 p_\lambda + f_2)$$

является полиномом второй степени и, значит,

$$R_\lambda = f_1 - p_\lambda \quad (\lambda = 1, 2, 3). \quad (2.157)$$

Выражение (149) для S получает форму ($n = 3$):

$$S = \frac{1}{2(f_1 f_2 - f_3)} \sum_{\lambda=1}^n \frac{1}{\Delta(p_\lambda) p_\lambda} (f_1 - p_\lambda) (g_0 p_\lambda^4 + g_2 p_\lambda^2 + g_4).$$

Дальнейшее вычисление делается по формулам (141); получаем

$$S = \frac{g_2 f_3 - g_0 f_2 f_3 - g_4 f_1}{2 f_3 (f_1 f_2 - f_3)}. \quad (2.158)$$

б) Для полинома

$$f(p) = p^4 - f_1 p^3 + f_2 p^2 - f_3 p + f_4$$

вычисление R по теории симметрических функций даёт¹

$$R = f_1 f_2 f_3 - f_1^2 f_4 - f_3^2.$$

Далее имеем по (147) и (148):

$$\begin{aligned} \frac{f(p)}{p - p_\lambda} &= p^3 + (p_\lambda - f_1)p^2 = (p_\lambda^2 - f_1 p_\lambda + f_2)p + \\ &+ p_\lambda^3 - f_1 p_\lambda^2 + f_2 p_\lambda - f_3 = p^3 - f_1^* p^2 + f_2^* p - f_3^* \end{aligned}$$

и по (155) находим

$$R_\lambda = f_1^* f_2^* - f_3^* = f_1 f_2 - f_3 + f_1 p_\lambda^2 - f_1^2 p_\lambda.$$

Остаётся сделать подстановку в формулу (149), в которой теперь по (140')

$$Q(p) = g_0 p^6 + g_2 p^4 + g_4 p^2 + g_6.$$

Элементарное вычисление даёт

$$\begin{aligned} S = \frac{1}{2R} \{ &g_0 [(f_1 f_2 - f_3) \sigma_5 + f_1 \sigma_7 - f_1^2 \sigma_6] + \\ &+ g_2 [(f_1 f_2 - f_3) \sigma_3 + f_1 \sigma_5 - f_1^2 \sigma_4] + g_4 f_1 \sigma_3 + \\ &+ g_6 (f_1 f_2 - f_3) \sigma_{-1} \}, \quad (2.159) \end{aligned}$$

где для краткости введены обозначения сумм

$$\sum_{\lambda=1}^n \frac{p_\lambda^k}{\Delta'(p_\lambda)} = \sigma_k \quad (k = -1, 0, 1, \dots, 7),$$

вычисляемых по (141). Получаем после простого вычисления по (141) и (159):

$$\begin{aligned} S = -\frac{1}{2Rf_4} [&g_0 f_4 (f_1 f_4 - f_2 f_3) + g_2 f_3 f_4 - \\ &- g_4 f_1 f_4 + g_6 (f_1 f_2 - f_3)]. \quad (2.160) \end{aligned}$$

¹ См., например, Д. К. Фаддеев и И. С. Соминский, Сборник задач по высшей алгебре. Гостехиздат, 1945, стр. 99.

Заметим, что величины Rf_3 и Rf_4 , стоящие в знаменателях выражений (158) и (160), положительны на основании критериев Раута—Гурвица для полиномов третьей и четвертой степени, выполнение которых было существенной предпосылкой всего исследования; поэтому полученные выражения дают конечные значения S (знаменатели отличны от нуля).

При вычислении сумм S предполагалось ещё, что все корни характеристического уравнения — простые. Но эти суммы зависят лишь от коэффициентов уравнения и являются их непрерывными функциями в области, где соблюдены критерии Раута—Гурвица. Можно утверждать поэтому, что если при непрерывном изменении коэффициентов в указанной области полином приобретает кратные корни, то форма выражения S не изменится. Поэтому сделанное при выводе предположение об отсутствии кратных корней не является существенным.

4°. Чтобы завершить исследование, нужно еще показать, что суммы вида

$$S_{2k+1} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^{2k+1}}{\Delta'(p_{\lambda}) \Delta(-p_{\lambda})} \quad (k = 0, 1, \dots, n-2),$$

входящие в S от нечетных слагаемых полинома (140), все обращаются в нуль. Для этого рассмотрим изображение

$$F(p) = \frac{p^{2k+2}}{\Delta(p) \Delta(-p)} \rightarrow f(t).$$

По первой теореме разложения

$$F(p) = \frac{1}{p^{2n-2k-2}} + \dots \rightarrow \frac{t^{2n-2k-2}}{(2n-2k-2)!} + \dots$$

откуда следует, что при $k \leq n-2$ начальная функция (и её первая производная) обращается в нуль при $t=0$:

$$f(0) = 0. \quad (2.161)$$

Применим теперь вторую теорему разложения; корни знаменателя суть: $p_1, p_2, \dots, p_n, -p_1, -p_2, \dots, -p_n$.

Поэтому получим:

$$F(p) = \sum_{\lambda=1}^n \left[\frac{p_{\lambda}^{2k+2}}{p_{\lambda} \left[\frac{d}{dp} \Delta(p) \Delta(-p) \right]_{p=p_{\lambda}}} \cdot \frac{p}{p-p_{\lambda}} + \right. \\ \left. + \frac{(-p_{\lambda})^{2k+2}}{(-p_{\lambda}) \left[\frac{d}{dp} \Delta(p) \Delta(-p) \right]_{p=-p_{\lambda}}} \cdot \frac{p}{p+p_{\lambda}} \right], \quad (2.162)$$

так как постоянное слагаемое $\frac{F_1(0)}{F_2(0)}$ в формуле VI табл. 2 в нашем случае равно нулю.

Имеем

$$\frac{d}{dp} \Delta(p) \Delta(-p) = \Delta'(p) \Delta(-p) + \Delta(p) \frac{d}{dp} \Delta(-p) = \\ = \Delta'(p) \Delta(-p) - \Delta(p) [\Delta'(z)]_{z=-p}. \quad (2.163)$$

Подставляя сюда $p = p_{\lambda}$, получаем

$$\left[\frac{d}{dp} \Delta(p) \Delta(-p) \right]_{p=p_{\lambda}} = \Delta'(p_{\lambda}) \Delta(-p_{\lambda}),$$

так как $\Delta(p_{\lambda}) = 0$.

Подставляя же в (163) $p = -p_{\lambda}$, найдём:

$$\left[\frac{d}{dp} \Delta(p) \Delta(-p) \right]_{p=-p_{\lambda}} = \Delta'(-p_{\lambda}) \Delta(p_{\lambda}) - \\ - \Delta(-p_{\lambda}) \left(\frac{d\Delta(z)}{dz} \right)_{z=p_{\lambda}} = -\Delta(-p_{\lambda}) \Delta'(p_{\lambda}).$$

Возвращаясь теперь к (162), получаем

$$F(p) = \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^{2k+1}}{\Delta'(p_{\lambda}) \Delta(-p_{\lambda})} \left(\frac{p}{p-p_{\lambda}} + \frac{p}{p+p_{\lambda}} \right)$$

и, значит,

$$f(t) = 2 \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^{2k+1}}{\Delta'(p_{\lambda}) \Delta(-p_{\lambda})} \operatorname{ch} p_{\lambda} t.$$

Полагая теперь $t = 0$, по (161) найдём:

$$S_{2k+1} = \sum_{\lambda=1}^n \frac{p_{\lambda}^{2k+1}}{\Delta'(p_{\lambda}) \Delta(-p_{\lambda})} = 0 \quad (2.164)$$

для всех целых $k \leq n-2$, что и требовалось доказать.

§ 13. Интегрирование неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с постоянными коэффициентами

1°. Рассматриваемая система дифференциальных уравнений имеет вид

$$\frac{dx_k}{dt} = \sum_{j=1}^n a_{kj} x_j + f_k(t). \quad (2.165)$$

Она отличается от однородной системы (83), рассмотренной в § 9, наличием в правых частях „возмущающих сил“ $f_k(t)$. Изображающая система при начальных условиях (82) будет:

$$pX_k(p) = px_k^0 + \sum_{j=1}^n a_{kj} X_j(p) + F_k(p). \quad (2.166)$$

Она отличается от (85) заменой x_k^0 на $x_k^0 + \frac{1}{p} F_k(p)$. Поэтому для написания решения системы (166) достаточно сделать эту замену в формулах (88); тогда

$$X_s(p) = -p \sum_{k=1}^n \left(x_k^0 + \frac{F_k(p)}{p} \right) \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)}. \quad (2.167)$$

Применив теорему свёртывания и используя (92), получим выражения начальных функций:

$$x_s(t) = \sum_{k=1}^n \left[x_k^0 \psi_{ks}(t) + \int_0^t f_k(\tau) \psi_{ks}(t-\tau) d\tau \right]. \quad (2.168)$$

Слагаемое

$$z_s(t) = \sum_{k=1}^n \int_0^t f_k(\tau) \psi_{ks}(t-\tau) d\tau \quad (2.169)$$

представляет решение системы (165), обращаемой в нуль при $t=0$. При рассмотрении частных задач предпочтительно

не прибегать к вычислению входящих в (169) интегралов, а непосредственно составлять начальные функции $z_s(t)$ по их изображениям:

$$Z_s(p) = - \sum_{k=1}^n \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)} F_k(p). \quad (2.170)$$

2°. Рассмотрим в частности случай действия на систему единичного импульса: пусть

$$f_m(t) = \sigma_1(t) \leftarrow p,$$

тогда как

$$f_k(t) = 0 \text{ при } k \neq m.$$

Получаем

$$Z_s(p) = -p \frac{\Delta_{ms}(p)}{\Delta(p)} = \Psi_{ms}(p) \quad (2.171)$$

и, значит,

$$z_s(t) = \psi_{ms}(t). \quad (2.172)$$

Из этого соотношения следует, что основная система интегралов определяет переходный процесс под действием указанного единичного импульса.

3°. Наибольший интерес представляет случай периодических „возмущающих сил“ $f_j(t)$. Положим

$$f_j(t+T) = f_j(t) \leftarrow F_j(p) = \frac{K_j(p)}{1-e^{-pT}}, \quad (2.173)$$

где, как и раньше,

$$K_j(p) \rightarrow k_j(t) = \begin{cases} f_j(t) & \text{при } t < T \\ 0 & \text{„ } t > T. \end{cases} \quad (2.174)$$

Изображение (167) напомним в форме:

$$X_s(p) = \frac{\Theta_s(p)}{1-e^{-pT}}, \quad (2.175)$$

где принято обозначение

$$\Theta_s(p) = - \sum_{j=1}^n \left[x_{jp}^0 \frac{\Delta_{js}(p)}{\Delta(p)} (1-e^{-pT}) + \frac{\Delta_{js}(p)}{\Delta(p)} K_j(p) \right]. \quad (2.176)$$

Применив теоремы запаздывания и свёртывания, получим соответствующие начальные функции $\vartheta_s(t) \leftarrow \Theta_s(p)$; при $t < T$:

$$\vartheta_s(t) = \sum_{j=1}^n \left[x_j^0 \psi_{js}(t) + \int_0^t \psi_{js}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \right] \quad (2.177)$$

и при $t > T$:

$$\begin{aligned} \vartheta_s(t) = \sum_{j=1}^n \left\{ x_j^0 [\psi_{js}(t) - \psi_{js}(t-T)] + \right. \\ \left. + \int_0^T \psi_{js}(t-\tau) f_j(\tau) d\tau \right\}, \end{aligned} \quad (2.178)$$

где принято во внимание (174).

Как следует из (175), решения $x_s(t)$ будут периодическими функциями t с периодом T , если, в соответствии с теоремой § 5, $\Theta_s(p)$ являются изображениями функций, обращающихся в нуль при $t > T$. Поэтому для отыскания *периодического решения системы* (165) следует определить постоянные x_j^0 так, чтобы тождественно обратить в нуль правые части (178); эти значения x_j^0 надо потом подставить в (177). Таким образом, система функций $x_s(t)$ будет определена её заданием при $t < T$:

$$x_s(t) = \vartheta_s(t) \quad (2.179)$$

и условием периодичности при $t > T$:

$$x_s(t) = x_s(t - nT). \quad (2.180)$$

Проведём это вычисление для случая простых корней характеристического уравнения. Заменяя в (176) выражение $p \frac{\Delta_{js}(p)}{\Delta(p)}$ его разложением на простейшие дроби, получим:

$$\begin{aligned} \Theta_s(p) = - \sum_{j=1}^n \left[(1 - e^{-pT}) x_j^0 + \frac{1}{p} K_j(p) \right] \times \\ \times \sum_{\lambda=1}^n \frac{\Delta_{js}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \frac{p}{p - p_\lambda}, \end{aligned} \quad (2.181)$$

что по (99) и (102) записывается ещё в форме:

$$\Theta_s(p) = \sum_{\lambda=2}^n \frac{p}{p-p_\lambda} \Delta_{1s}(p_\lambda) \left[C_\lambda (1 - e^{-pT}) - \sum_{j=1}^n \frac{C_\lambda^{(j)}}{\Delta'(p_\lambda)} \cdot \frac{K_j(p)}{p} \right]. \quad (2.182)$$

Имеем

$$\frac{p}{p-p_\lambda} (1 - e^{-pT}) \dot{\rightarrow} \begin{cases} e^{p_\lambda t} & \text{при } t < T \\ e^{p_\lambda t} (1 - e^{-p_\lambda T}) & \text{„ } t > T \end{cases}$$

$$\frac{K_j(p)}{p-p_\lambda} \dot{\rightarrow} \int_0^t k_j(\tau) e^{p_\lambda(t-\tau)} d\tau,$$

откуда по (174) находим:

$$\frac{K_j(p)}{p-p_\lambda} \dot{\rightarrow} \begin{cases} e^{p_\lambda t} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau & \text{при } t < T \\ e^{p_\lambda t} \int_0^T e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau & \text{„ } t > T. \end{cases}$$

Воспользовавшись этим, пишем выражение начальной функции для изображения (182):

при $t < T$:

$$\Theta_s(t) = \sum_{\lambda=1}^n \Delta_{1s}(p_\lambda) e^{p_\lambda t} \left[C_\lambda - \sum_{j=1}^n \frac{C_\lambda^{(j)}}{\Delta'(p_\lambda)} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau \right] \quad (2.183)$$

и при $t > T$:

$$\Theta_s(t) = \sum_{\lambda=1}^n \Delta_{1s}(p_\lambda) e^{p_\lambda t} \left[C_\lambda (1 - e^{-p_\lambda T}) - \sum_{j=1}^n \frac{C_\lambda^{(j)}}{\Delta'(p_\lambda)} \int_0^T e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau \right]. \quad (2.184)$$

Правая часть (184) должна обращаться тождественно в нуль; поэтому приравниваем нулю множители при $e^{p_\lambda t}$ под знаком суммы.

Получаем систему n уравнений ($\lambda = 1, 2, \dots, n$):

$$C_\lambda (1 - e^{-p_\lambda T}) = \sum_{j=1}^n \frac{C_\lambda^{(j)}}{\Delta'(p_\lambda)} \int_0^T e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau. \quad (2.185)$$

При условии

$$1 - e^{-p_\lambda T} \neq 0 \quad (2.186)$$

отсюда находим неизвестные C_λ :

$$C_\lambda = \frac{\sum_{j=1}^n \frac{C_\lambda^{(j)}}{\Delta'(p_\lambda)} \int_0^T e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau}{1 - e^{-p_\lambda T}}. \quad (2.187)$$

Подстановка (187) в (183) даёт искомое периодическое решение при $0 < t < T$:

$$\begin{aligned} x_s(t) = \sum_{\lambda=1}^n \frac{e^{p_\lambda t}}{1 - e^{-p_\lambda T}} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_0^T e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau - \right. \\ \left. - (1 - e^{-p_\lambda T}) \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau \right]. \quad (2.188) \end{aligned}$$

При этой записи использовано соотношение $C_\lambda^{(j)} \Delta_{1s}(p_\lambda) = \Delta_{js}(p_\lambda)$.

Выражение (188) можно записать также в форме:

$$\begin{aligned} x_s(t) = \sum_{\lambda=1}^n \frac{e^{p_\lambda t}}{1 - e^{-p_\lambda T}} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_t^T e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau + \right. \\ \left. + e^{-p_\lambda T} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau \right], \quad (2.189) \end{aligned}$$

из которой сразу видно, что $x_s = (0) = x_s(T)$, т. е. полученное решение является периодическим (см. § 6).

4°. Предположим теперь, что в числе корней характеристического уравнения имеется нулевой корень: $p_n = 0$. Неравенство (186) для этого корня обращается в равенство, и *периодическое решение системы дифференциальных уравнений (165) будет существовать лишь при выполнении условия*, получающегося из последнего ($\lambda = n$) соотношения (185) при $p_n = 0$:

$$\sum_{j=1}^n \frac{C_n^{(j)}}{\Delta'(0)} \int_0^T f_j(\tau) d\tau = 0$$

или

$$\sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}(0)}{\Delta'(0)} \int_0^T f_j(\tau) d\tau = 0. \quad (2.190)$$

Постоянная C_n остаётся при этом неопределённой. Искомое периодическое решение имеет вид (при $0 < t < T$):

$$\begin{aligned} x_s(t) = & \sum_{\lambda=1}^{n-1} \left\{ \frac{e^{p_\lambda t}}{1 - e^{-p_\lambda T}} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_t^T e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau + \right. \right. \\ & \left. \left. + e^{-p_\lambda T} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau \right] \right\} + \\ & + C_n - \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}(0)}{\Delta'(0)} \int_0^t f_j(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (2.191)$$

Остаётся рассмотреть случай, когда характеристическое уравнение имеет два сопряжённых *чисто мнимых* корня, обращающих в нуль левую часть (186). В механической интерпретации это обозначает, что *одна из частот свободных колебаний* динамической системы, поведение которой описывается дифференциальными уравнениями (165), *оказывается кратной частоте* $\frac{2\pi}{T}$ *„возмущающих сил“* $f_j(t)$.

Итак, по условию имеем:

$$p_{n-1} = -p_n = \frac{2\pi i}{T} m, \quad (2.192)$$

где m — целое число.

Периодическое решение системы (165) при этом может существовать, если при $\lambda = n - 1$ и $\lambda = n$ правые части (185) обратятся в нуль; получаем два условия:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{C_{n-1}^{(j)}}{\Delta' \left(\frac{2\pi i m}{T} \right)} \int_0^T e^{-\frac{2\pi i m \tau}{T}} f_j(\tau) d\tau &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{C_n^{(j)}}{\Delta' \left(-\frac{2\pi i m}{T} \right)} \int_0^T e^{\frac{2\pi i m \tau}{T}} f_j(\tau) d\tau &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.193)$$

выражающих требование обращения в нуль гармоник m -го порядка в разложении в тригонометрический ряд „обобщённых возмущающих сил“

$$\sum_{j=1}^n \frac{C_{n-1}^{(j)}}{\Delta' \left(\frac{2\pi i m}{T} \right)} f_j(t)$$

и

$$\sum_{j=1}^n \frac{C_n^{(j)}}{\Delta' \left(-\frac{2\pi i m}{T} \right)} f_j(t).$$

Условия (193) можно написать также в виде:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js} \left(\frac{2\pi i m}{T} \right)}{\Delta' \left(\frac{2\pi i m}{T} \right)} \int_0^T e^{-\frac{2\pi i m \tau}{T}} f_j(\tau) d\tau &= 0, \\ \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js} \left(-\frac{2\pi i m}{T} \right)}{\Delta' \left(-\frac{2\pi i m}{T} \right)} \int_0^T e^{\frac{2\pi i m \tau}{T}} f_j(\tau) d\tau &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (2.194)$$

причём достаточно им удовлетворить для $s = 1$, чтобы, вследствие (99), они удовлетворялись для любого $s = 2, 3, \dots, n$.

Постоянные C_{n-1} и C_n остаются неопределёнными — это произвольные комплексные сопряженные числа. Искомое периодическое решение системы (165) при условии (192) будет:

$$\begin{aligned}
 x_s(t) = & \sum_{\lambda=1}^{n-2} \left\{ \frac{e^{p_\lambda t}}{1 - e^{-p_\lambda T}} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_t^T e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau + \right. \right. \\
 & \left. \left. + e^{-p_\lambda T} \int_0^t e^{-p_\lambda \tau} f_j(\tau) d\tau \right] \right\} + \\
 & + e^{\frac{2\pi i m t}{T}} \left[C_{n-1} - \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}\left(\frac{2\pi i m}{T}\right)}{\Delta'\left(\frac{2\pi i m}{T}\right)} \int_0^t e^{-\frac{2\pi i m \tau}{T}} f_j(\tau) d\tau \right] + \\
 & + e^{-\frac{2\pi i m t}{T}} \left[C_n - \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}\left(-\frac{2\pi i m}{T}\right)}{\Delta'\left(-\frac{2\pi i m}{T}\right)} \int_0^t e^{\frac{2\pi i m \tau}{T}} f_j(\tau) d\tau \right].
 \end{aligned} \quad (2.195)$$

Два последних слагаемых можно объединить, представив их в вещественной (тригонометрической) форме.

5°. В важном для приложений частном случае, когда $f_j(t)$ — периодические функции периода $2T$, меняющие свой знак через полупериод, следует исходить из формулы (67) для изображений этих функций. Решение $x_s(t)$ системы дифференциальных уравнений (165), также имеющее период $2T$ и меняющее знак через полупериод, существует при условии

$$1 + e^{-p_\lambda T} \neq 0. \quad (2.196)$$

При $0 < t < T$ оно даётся выражениями, аналогичными (189):

$$\begin{aligned}
 x_s(t) = & \sum_{\lambda=1}^n \left\{ \frac{e^{p_\lambda t}}{1 + e^{-p_\lambda T}} \sum_{j=1}^n \frac{\Delta_{js}(p_\lambda)}{\Delta'(p_\lambda)} \left[\int_t^T f_j(\tau) e^{-p_\lambda \tau} d\tau - \right. \right. \\
 & \left. \left. - e^{-p_\lambda T} \int_0^t f_j(\tau) e^{-p_\lambda \tau} d\tau \right] \right\}.
 \end{aligned} \quad (2.197)$$

Это решение продолжается в промежуток $(T, 2T)$ с помощью условий

$$x_s(t - T) = -x_s(t) \quad (2.198)$$

и далее определяется условиями периодичности

$$x_s(t - 2nT) = x_s(t). \quad (2.199)$$

Если характеристическое уравнение (93) имеет два чисто мнимых корня

$$p_{n-1} = -p_n = \frac{(2m+1)\pi i}{T}, \quad (2.200)$$

где m — целое число, то условие (196) не соблюдается и для существования периодического решения „возмущающие силы“ должны удовлетворять требованиям, аналогичным (194); в этом случае периодическое решение системы (165) будет определено с точностью до выражений, содержащих две произвольные сопряжённые комплексные постоянные и может быть составлено в форме, аналогичной (195).

Мы не будем останавливаться на рассмотрении случая кратных корней характеристического уравнения. Ещё раз заметим, что при рассмотрении частных задач рекомендуется не прибегать к общим формулам, а использовать метод рассуждения, с помощью которого они получены. Это позволит попутно внести в вычисление многочисленные упрощения, которые приходят сами собой, после того как приобретен некоторый опыт применения приёмов операционного исчисления.

6°. В качестве примера рассмотрим систему дифференциальных уравнений:

$$\begin{aligned} \dot{x}_k &= -\rho_k x_k + \psi(t) \quad (k = 1, 2, \dots, n), \\ \dot{x} &= \beta_1 x_1 + \beta_2 x_2 + \dots + \beta_n x_n - r\psi(t), \end{aligned} \quad (2.201)$$

где $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_n, \beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n, r$ — некоторые постоянные, $\psi(t)$ — периодическая функция периода $2T$, меняющая знак через полупериод. Задача состоит в отыскании решения этой системы, имеющего тот же период и меняющего знак по прошествии полупериода. Разыскание такого решения имеет

значение для широкого класса задач теории автоматического регулирования.¹

Изображающая система уравнений имеет вид:

$$\left. \begin{aligned} (p + \rho_k) X_k(p) &= p x_k^0 + \Psi(p), \\ pX(p) &= p x_0 + \beta_1 X_1(p) + \dots + \beta_n X_n(p) - r \Psi(p). \end{aligned} \right\} \quad (2.202)$$

По (1.101) имеем

$$\Psi(p) = \frac{F(p)}{1 + e^{-pT}}, \quad (2.203)$$

где $F(p) \rightarrow f(t)$, причём

$$f(t) = \begin{cases} \psi(t) & 0 < t < T \\ 0 & t > T \end{cases} \quad (2.204)$$

Тогда

$$X_k(p) = \frac{\Theta_k(p)}{1 + e^{-pT}}, \quad (2.205)$$

где обозначено

$$\Theta_k(p) = x_k^0 \frac{p}{p + \rho_k} (1 + e^{-pT}) + \frac{F(p)}{p + \rho_k}. \quad (2.206)$$

Подстановка (206) в последнее уравнение (202) даёт

$$X(p) = \frac{\Theta(p)}{1 + e^{-pT}}, \quad (2.207)$$

причём

$$\begin{aligned} \Theta(p) &= \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k x_k^0}{p + \rho_k} (1 + e^{-pT}) + \\ &+ x_0 (1 + e^{-pT}) + \frac{F(p)}{p} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{p + \rho_k} - r \right). \end{aligned} \quad (2.208)$$

¹ См. А. И. Лурье, Автоколебания в некоторых регулируемых системах. Журнал „Автоматика и телемеханика“, VIII, № 5, 1947, стр. 337—348.

При $t < T$ получаем:

$$\begin{aligned}\Theta_k(p) &\div \rightarrow \vartheta_k(t) = x_k^0 e^{-\rho_k t} + e^{-\rho_k t} \int_0^t e^{\rho_k \tau} \psi(\tau) d\tau, \\ \Theta(p) &\div \rightarrow \vartheta(t) = x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k x_k^0}{\rho_k} (1 - e^{-\rho_k t}) + \\ &+ \int_0^t \psi(\tau) \left[\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\rho_k} (1 - e^{-\rho_k(t-\tau)}) - r \right] d\tau. \quad (2.209)\end{aligned}$$

При $t > T$ имеем:

$$\begin{aligned}\vartheta_k(t) &= x_k^0 e^{-\rho_k t} (1 + e^{\rho_k T}) + e^{-\rho_k t} \int_0^T e^{\rho_k \tau} \psi(\tau) d\tau, \\ \vartheta(t) &= 2x_0 + \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k x_k^0}{\rho_k} (2 - e^{-\rho_k t} - e^{-\rho_k(t-T)}) + \\ &+ \int_0^T \psi(\tau) \left[\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\rho_k} (1 - e^{-\rho_k(t-\tau)}) - r \right] d\tau. \quad (2.210)\end{aligned}$$

Надо потребовать, чтобы $\vartheta_k(t)$ и $\vartheta(t)$ тождественно обращались в нуль при $t > T$. Это позволяет найти значения постоянных x_k^0 и x_0 :

$$\begin{aligned}x_k^0 &= - \frac{\int_0^T e^{\rho_k \tau} \psi(\tau) d\tau}{1 + e^{\rho_k T}}, \\ x_0 &= \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\rho_k} \frac{\int_0^T e^{\rho_k \tau} \psi(\tau) d\tau}{1 + e^{\rho_k T}} - \frac{1}{2} \left(\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\rho_k} - r \right) \int_0^T \psi(\tau) d\tau.\end{aligned}$$

Подстановка этих значений в (209) даёт выражение искомого периодического решения для $0 < t < T$:

$$\left. \begin{aligned} x_k(t) &= e^{-\rho_k t} \left[\int_0^t e^{\rho_k \tau} \psi(\tau) d\tau - \frac{\int_0^T e^{\rho_k \tau} \psi(\tau) d\tau}{1 + e^{\rho_k T}} \right]; \\ x(t) &= \left(\sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\rho_k} - r \right) \left[\int_0^t \psi(\tau) d\tau - \int_0^T \psi(\tau) d\tau \right] - \\ &- \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\rho_k} e^{-\rho_k t} \left[\int_0^t \psi(\tau) e^{\rho_k \tau} d\tau - \frac{\int_0^T \psi(\tau) e^{\rho_k \tau} d\tau}{1 + e^{\rho_k T}} \right]. \end{aligned} \right\} \quad (2.211)$$

Значения решений при $t > T$ находим по (198) и (199). Рассмотрим, в частности, случай функции $\psi(t)$, заданной графиком рис. 8:

$$\psi(t) = f_0 [\sigma_0(t) - 2\sigma_0(t-T) + 2\sigma_0(t-2T) - \dots].$$

Для $t < T$ имеем:

$$\int_0^t \psi(\tau) d\tau = f_0 t, \quad \int_0^t \psi(\tau) e^{\rho_k \tau} d\tau = \frac{f_0}{\rho_k} (e^{\rho_k t} - 1)$$

и (211) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} x_k(t) &= \frac{f_0}{\rho_k} (1 - e^{-\rho_k t}) - \frac{f_0}{\rho_k} \operatorname{th} \frac{\rho_k T}{2} e^{-\rho_k t}; \\ x(t) &= f_0 \sum_{k=1}^n \left(\frac{\beta_k}{\rho_k} - r \right) \left(t - \frac{1}{2} T \right) - \\ &- f_0 \sum_{k=1}^n \frac{\beta_k}{\rho_k} \left(1 - e^{-\rho_k t} - e^{-\rho_k t} \operatorname{th} \frac{\rho_k T}{2} \right). \end{aligned} \right\} \quad (2.212)$$

Теперь нетрудно проверить, что $x_k(0) = -x_k(T)$, $x(0) = -x(T)$, как и требуется.

7°. Как второй пример рассмотрим задачу о вынужденных колебаниях консервативной динамической системы с конечным числом степеней свободы.

Свободные колебания такой системы были рассмотрены в § 10; для простоты положим $q_i^0 = \dot{q}_i^0 = 0$ и примем, что обобщённые силы $f_i(t)$ изменяются по синусоидальному закону с частотой ω .

Тогда вместо (104) получим систему дифференциальных уравнений:

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} \ddot{q}_k + c_{ik} \dot{q}_k) = f_i(t) = A_i \cos \omega t.$$

Её изображение будет:

$$\sum_{k=1}^n (a_{ik} p^2 + c_{ik}) Q_k(p) = A_i \frac{p^2}{p^2 + \omega^2},$$

откуда находим

$$Q_k(p) = \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2) \Delta(p^2)} \sum_{i=1}^n A_i \Delta_{ik}(p^2), \quad (2.213)$$

где $\Delta(p^2)$ определено по (107). Знаменатель имеет корни $p^2 = -p_\lambda^2$ ($\lambda = 1, 2, \dots, n$) и $p^2 = -\omega^2$. По второй теореме разложения, полагая $p_\lambda^2 \neq \omega^2$, получаем

$$\begin{aligned} Q_k(p) \rightarrow & \sum_{\lambda=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\omega^2 - p_\lambda^2} \frac{\Delta_{ik}(-p_\lambda^2)}{[\Delta'(z)]_{z=-p_\lambda^2}} \cos p_\lambda t + \\ & + \sum_{i=1}^n \frac{A_i \Delta_{ik}(-\omega^2)}{\Delta(-\omega^2)} \cos \omega t. \end{aligned} \quad (2.214)$$

Вторая сумма в правой части представляет чисто вынужденные колебания — колебания, происходящие с частотой возмущающих сил.

Рассмотрим теперь случай резонанса $\omega = p_s$. Согласно сказанному в § 10, кратный корень полинома $\Delta(p^2)$ является корнем кратности на единицу меньшей всех миноров $\Delta_{ik}(p^2)$; поэтому $p^2 = -\omega^2 = -p_s^2$ можно считать кор-

нем второй кратности знаменателя выражения (213). Полагая $\Delta(p^2) = (p^2 + \omega^2) \Delta_1(p^2)$, получаем по (1.74):

$$Q_k(p) = \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2 \Delta_1(p^2)} \sum_{i=1}^n A_i \Delta_{ik}(p^2) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i \Delta_{ik}(-\omega^2)}{\Delta_1(-\omega^2)} \times \\ \times \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2} + \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \left\{ \frac{d}{dz} \left[\frac{\sum_{i=1}^n A_i \Delta_{ik}(z)}{\Delta_1(z)} \right] \right\}_{z=-\omega^2} + \\ + \sum_{i=1}^n \sum_{\lambda=1}^n \frac{A_i}{(\omega^2 - p_\lambda^2)^2} \frac{\Delta_{ik}(-p_\lambda^2)}{[\Delta_1'(z)]_{z=-p_\lambda^2}} \frac{p^2}{p^2 + p_\lambda^2},$$

где звёздочка указывает на пропуск при суммировании слагаемого $\lambda = s$.

Соответствующие начальные функции по IV табл. 2 будут:

$$q_k(t) = \sum_{i=1}^n \frac{A_i \Delta_{ik}(-\omega^2)}{2\omega \Delta_1(-\omega^2)} t \sin \omega t + \frac{d}{dz} \left\{ \frac{\sum_{i=1}^n A_i \Delta_{ik}(z)}{\Delta_1(z)} \right\}_{z=-\omega^2} \times \\ \times \cos \omega t + \sum_{\lambda=1}^n \sum_{i=1}^n \frac{A_i}{\omega^2 - p_\lambda^2} \frac{\Delta_{ik}(-p_\lambda^2)}{[\Delta_1'(z)]_{z=-p_\lambda^2}} \cos p_\lambda t. \quad (2.215)$$

Наличие в решении слагаемых, содержащих t множителем при тригонометрической функции, указывает на явление резонанса.

§ 14. Основные формулы операционного исчисления для ступенчатых функций

Для изложения теории разностных уравнений будет целесообразно развить предварительно некоторые простые предложения, относящиеся к приложению операционного исчисления к так называемым *ступенчатым функциям*.¹

¹ См. М. Гарднер и Дж. Бэрнс, Переходные процессы в линейных системах, гл. IX, Гостехиздат, 1949, или Я. З. Цыпкин, Теория прерывистого регулирования. Журнал „Автоматика и телемеханика“, X, № 3, 1949, стр. 217—223.

Пусть дана непрерывная функция $f(t)$, определённая для положительных значений аргумента t и имеющая при достаточно больших t экспоненциальный порядок роста:

$$|f(t)| < Me^{a_0 t}. \quad (2.216)$$

Этой функции сопоставляется разрывная, ступенчатая функция (рис. 17), обозначаемая $f[t]$, которая принимает те же значения, что $f(t)$, когда аргумент равен целому кратному T ,

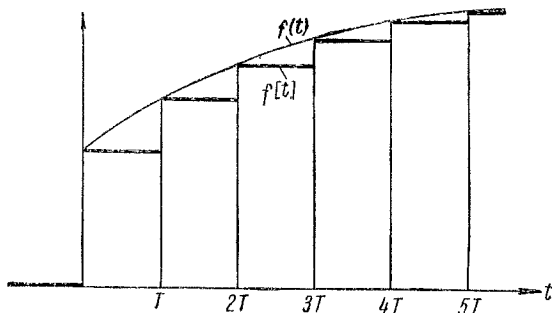


Рис. 17. Функция $f(t)$ и соответствующая ей ступенчатая функция $f[t]$.

и имеет постоянное значение при изменении аргумента в замкнутом слева интервале $kT, (k+1)T$:

$$f[t] = f(kT) \quad \text{при} \quad kT \leq t < (k+1)T, \quad (2.217)$$

где $k = 0, 1, 2, \dots$

По (1.84) § 5 сказанное можно записать в форме:

$$\begin{aligned} f[t] = & f(0) \sigma_0(t) + [f(T) - f(0)] \sigma_0(t - T) + \\ & + [f(2T) - f(T)] \sigma_0(t - 2T) + \dots = \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) [\sigma_0(t - kT) - \\ & - \sigma_0(t - kT - T)]. \end{aligned} \quad (2.218)$$

В отличие от $F(p) \div \rightarrow f(t)$ назовём через $\overset{*}{F}(p)$ изображение $f[t]$; получим:

$$\begin{aligned} f[t] \leftarrow \div \overset{*}{F}(p) &= \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) \left(e^{-kTp} - e^{-(k+1)Tp} \right) = \\ &= \left(1 - e^{-pT} \right) \sum_{k=0}^{\infty} f(kT) e^{-kTp}. \end{aligned} \quad (2.219)$$

Этот ряд вследствие (216) сходится при $\operatorname{Re} p > s_0$.

В дальнейшем для упрощения записей вводим новую независимую переменную $x = \frac{t}{T}$. Тогда $f[x]$ будет ступенчатой функцией, точки разрыва которой представляют последовательность натурального ряда чисел $0, 1, 2, \dots$; поэтому вместо (219) получаем:

$$f[x] \leftarrow \div \overset{*}{F}(p) = (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-kp}. \quad (2.220)$$

Перейдём к рассмотрению некоторых свойств изображений ступенчатых функций.

1°. Теорема упрещения. Согласно (218):

$$\begin{aligned} f[x+1] &= f(1) \sigma_0(x) + [f(2) - f(1)] \sigma_0(x-1) + \dots = \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} f(k) [\sigma_0(x-k+1) - \sigma_0(x-k)] \leftarrow \div \sum_{k=1}^{\infty} f(k) \times \\ &\times [e^{-p(k-1)} - e^{-pk}] = e^p (1 - e^{-p}) \left[\sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-pk} - f(0) \right] \end{aligned}$$

и по (220)

$$f[x+1] \leftarrow \div e^p \overset{*}{F}(p) - (1 - e^{-p}) e^p f(0). \quad (2.221)$$

Аналогично получим:

$$f[x+2] \leftarrow \div e^{2p} \overset{*}{F}(p) - (1 - e^{-p}) [e^{2p} f(0) + e^p f(1)]$$

и вообще для целого n :

$$\begin{aligned} f[x+n] \leftarrow \div e^{np} \overset{*}{F}(p) - (1 - e^{-p}) [e^{np} f(0) + \\ + e^{(n-1)p} f(1) + \dots + e^p f(n-1)]. \end{aligned} \quad (2.222)$$

Доказанное положение можно назвать „теоремой упреждения“. Для разностных уравнений оно имеет то же значение, что и формула, связывающая изображение производной с изображением функции для дифференциальных уравнений.

2°. Теорема запаздывания для ступенчатых функций формулируется обычным образом (IV табл. 1):

$$e^{-np} F^*(p) \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } x < n \\ f[x-n] & \text{„ } x > n \end{cases} \quad (2.223)$$

причём, как всегда, предполагается $f(x) = 0$ при $x < 0$.

3°. Изображение $e^{\beta[x]} f[x]$. По определению имеем

$$\begin{aligned} e^{\beta[x]} f[x] &\leftarrow (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{\beta k} e^{-kp} = \\ &= \frac{1 - e^{-p}}{1 - e^{-(p-\beta)}} [1 - e^{-(p-\beta)}] \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-k(p-\beta)}. \end{aligned}$$

Заменив в (220) p на $(p - \beta)$, можем написать:

$$F^*(p - \beta) = [1 - e^{-(p-\beta)}] \sum_{k=0}^{\infty} f(k) e^{-k(p-\beta)}$$

и, значит:

$$\begin{aligned} e^{\beta[x]} f[x] &\leftarrow \frac{1 - e^{-p}}{1 - e^{-(p-\beta)}} F^*(p - \beta) = \\ &= \frac{e^p - 1}{e^p - e^{\beta}} F^*(p - \beta). \end{aligned} \quad (2.224)$$

4°. Теорема свёртывания. По (220) находим:

$$F_1^*(p) F_2^*(p) = (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} f_1(k) e^{-kp} \cdot F_2^*(p),$$

откуда по (223):

$$\frac{F_1^*(p) F_2^*(p)}{1 - e^{-p}} \rightarrow \sum_{k=0}^{[x]} f_1(k) f_2[x-k], \quad (2.225)$$

где $[x]$ обозначает целую часть x .

5°. Дифференцирование изображения. По (220):

$$\frac{\overset{*}{F}(p)}{1 - e^{-p}} = \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kp} f(k).$$

Ряд справа по (216) можно дифференцировать по p любое число раз. Поэтому

$$\frac{d^n}{dp^n} \frac{\overset{*}{F}(p)}{1 - e^{-p}} = (-1)^n \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kp} k^n f(k),$$

откуда, имея в виду, что

$$(1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} k^n f(k) e^{-kp} \rightarrow [x]^n f[x],$$

получим

$$[x]^n f[x] \leftarrow \div (-1)^n (1 - e^{-p}) \frac{d^n}{dp^n} \frac{\overset{*}{F}(p)}{1 - e^{-p}}. \quad (2.226)$$

Переходим к построению изображений некоторых ступенчатых функций.

6°. Изображение $[x]^n$. Изображение постоянной, как известно, есть эта же постоянная; это легко проверить и по (220):

$$1 = [1] \leftarrow \div (1 - e^{-p}) \sum_{k=0}^{\infty} e^{-kp} = 1.$$

Отсюда по (226) находим:

$$[x] \leftarrow \div - (1 - e^{-p}) \frac{d}{dp} \frac{1}{1 - e^{-p}} = \frac{e^{-p}}{1 - e^{-p}} = \frac{1}{e^p - 1}$$

и т. д. Получаем формулы:

$$[x] \leftarrow \div \frac{1}{e^p - 1}, [x]^2 \leftarrow \div \frac{e^p + 1}{(e^p - 1)^2}, [x]^3 \leftarrow \div \frac{e^{2p} + 4e^p + 1}{(e^p - 1)^3} \quad (2.227)$$

и т. д.

7°. Факториальная функция. Так называется функция

$$\gamma_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}. \quad (2.228)$$

Имеем:

$$\gamma_n(x+1) = \frac{(x+1)x(x-1)\dots(x-n+2)}{n!}$$

и, следовательно:

$$\gamma_n(x+1) - \gamma_n(x) = \frac{x(x-1)\dots(x-n+2)}{(n-1)!} = \gamma_{n-1}(x)$$

или, переходя к ступенчатым функциям:

$$\gamma_n[x+1] - \gamma_n[x] = \gamma_{n-1}[x]. \quad (2.229)$$

Обозначая $\tilde{\Gamma}_n^*(p) \leftarrow \gamma_n[x]$ и имея в виду, что $\gamma_n(0) = 0$, по (221) получим:

$$(e^p - 1) \tilde{\Gamma}_n^*(p) = \tilde{\Gamma}_{n-1}^*(p), \text{ т. е. } \tilde{\Gamma}_n^*(p) = \frac{\tilde{\Gamma}_{n-1}^*(p)}{e^p - 1}. \quad (2.230)$$

Но по (228) и (227):

$$\gamma_1[x] = [x] \leftarrow \tilde{\Gamma}_1^*(p) = \frac{1}{e^p - 1},$$

значит,

$$\gamma_2[x] \leftarrow \frac{1}{(e^p - 1)^2}, \dots, \gamma_n[x] \leftarrow \frac{1}{(e^p - 1)^n}. \quad (2.231)$$

8°. Показательная функция. По (224) имеем:

$$e^\beta [x] \leftarrow \frac{e^p - 1}{e^p - e^\beta}. \quad (2.232)$$

По (224) и (227) находим:

$$\begin{aligned} [x] e^\beta [x] &\leftarrow \frac{e^\beta (e^p - 1)}{(e^p - e^\beta)^2}, \\ [x]^2 e^\beta [x] &\leftarrow \frac{(e^p - 1)(e^p + e^\beta) e^\beta}{(e^p - e^\beta)^3} \end{aligned} \quad (2.233)$$

и т. д. Точно так же получаем изображение:

$$\gamma_n[x] e^\beta [x] \leftarrow \frac{e^{n\beta} (e^p - 1)}{(e^p - e^\beta)^{n+1}}. \quad (2.234)$$

Полагая в (232) $\beta = i\omega$, получим, после выделения вещественной и мнимой частей, изображения ступенчатых тригонометрических функций:

$$\begin{aligned}\cos \omega [x] &\leftarrow \div \frac{(e^p - 1)(e^p - \cos \omega)}{e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1}, \\ \sin \omega [x] &\leftarrow \div \frac{(e^p - 1) \sin \omega}{e^{2p} - 2e^p \cos \omega + 1}.\end{aligned}\quad (2.235)$$

9°. Аналог первой теоремы разложения. Для нахождения начальной ступенчатой функции по её изображению может быть применён способ разложения изображения в ряд по степеням e^{-p} с последующим применением теоремы запаздывания (223). Например,

$$\begin{aligned}\frac{e^{-p}(1 + e^{-p})}{(1 - e^{-p})^2} &= (e^{-p} + e^{-2p})(1 + 2e^{-p} + 3e^{-2p} + 4e^{-3p} + \dots) = \\ &= e^{-p} + 3e^{-2p} + 5e^{-3p} + 7e^{-4p} = \dots,\end{aligned}$$

откуда следует:

$$\frac{e^{-p}(1 + e^{-p})}{(1 - e^{-p})^2} \rightarrow \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x < 1 \\ 1 & \text{„ } 1 \leq x < 2 \\ 1 + 3 = 4 & \text{„ } 2 \leq x < 3 \\ 4 + 5 = 9 & \text{„ } 3 \leq x < 4 \\ & \text{и т. д.} \end{cases}$$

Мы проверили таким образом соотношение

$$\frac{e^p + 1}{(e^p - 1)^2} \rightarrow [x]^2.$$

10°. Вторая теорема разложения. При решении разностных уравнений постоянно приходится разыскивать начальную ступенчатую функцию по изображению, представляющему отношение двух полиномов относительно e^p :

$$^*F(p) = \frac{P(e^p)}{Q(e^p)}, \quad (2.236)$$

причём степень знаменателя не ниже, чем степень числителя,

Корни полинома $Q(p)$ относительно e^p обозначим

$$e^{p_1}, e^{p_2}, \dots, e^{p_n}$$

и будем предполагать, что они простые и что ни один из них не равен единице. Как в § 4, ищем разложение на простейшие дроби выражения

$$\frac{P(e^p)}{Q(e^p)(e^p - 1)} = \frac{A}{e^p - 1} + \sum_{v=1}^n \frac{B_v}{e^p - e^{p_v}}.$$

Коэффициенты разложения A и B_v находятся с помощью приёма, который применялся в § 4. Тогда

$$\frac{P(e^p)}{Q(e^p)} = \frac{P(1)}{Q(1)} + \sum_{v=1}^n \frac{P(e^{p_v})}{Q'(e^{p_v})(e^{p_v} - 1)} \cdot \frac{e^p - 1}{e^p - e^{p_v}}, \quad (2.237)$$

где штрихом обозначена производная по e^p . По (232) получаем:

$$\frac{P(e^p)}{Q(e^p)} \rightarrow \frac{P(1)}{Q(1)} + \sum_{v=1}^n \frac{P(e^{p_v})}{Q'(e^{p_v})(e^{p_v} - 1)} e^{p_v[x]}. \quad (2.238)$$

При наличии у полинома $Q(e^p)$ корня $e^p = 1$ пишем:

$$\begin{aligned} \frac{P(e^p)}{(e^p - 1)Q(e^p)} &= \frac{P(e^p)}{(e^p - 1)^2 Q_1(e^p)} = \\ &= \frac{A}{(e^p - 1)^2} + \frac{B}{e^p - 1} + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{C_v}{e^p - e^{p_v}}. \end{aligned}$$

Коэффициенты A и B находятся по формулам:

$$A = \frac{P(1)}{Q_1(1)}, \quad B = \left[\frac{d}{de^p} \frac{P(e^p)}{Q_1(e^p)} \right]_{e^p=1}.$$

Получаем:]

$$\begin{aligned} \frac{P(e^p)}{Q(e^p)} &= \left[\frac{d}{de^p} \frac{P(e^p)}{Q_1(e^p)} \right]_{e^p=1} + \frac{P(1)}{Q_1(1)} \frac{1}{e^p - 1} + \\ &+ \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P(e^{p_v})}{(e^{p_v} - 1) Q'(e^{p_v})} \frac{e^p - 1}{e^{p_v} - e^p} \end{aligned}$$

и по (227)

$$\frac{P(e^p)}{Q(e^p)} \rightarrow \left[\frac{d}{de^p} \frac{P(e^p)}{Q_1(e^p)} \right]_{e^p=1} + \frac{P(1)}{Q_1(1)} [x] + \\ + \sum_{v=1}^{n-1} \frac{P(e^{p_v})}{(e^{p_v}-1) Q'(e^{p_v})} e^{p_v} [x]. \quad (2.239)$$

Аналогично находится начальная функция при наличии кратных корней полинома $Q(e^p)$. В её состав войдут слагаемые вида $\gamma_n [x] e^{p_v} [x]$, изображения которых даются формулами (234).

§ 15. Решение линейного разностного уравнения с постоянными коэффициентами

1°. Линейное соотношение

$$y[x+n] + a_1 y[x+n-1] + \dots + \\ + a_{n-1} y[x+1] + a_n y[x] = f[x], \quad (2.240)$$

связывающее значение ступенчатой функции $y[x]$ в $(n+1)$ точках $[x]$, $[x]+1$, ..., $[x]+n$, называется линейным разностным уравнением. Свободный член этого уравнения $f[x]$ задан, коэффициенты $a_1, a_2, \dots, a_n$ мы будем считать постоянными, т. е. независимыми от x числами.

Предполагаются заданными значения искомой ступенчатой функции $y[x]$ при $x=0, 1, 2, \dots, n-1$:

$$y(0)=y_0, \quad y(1)=y_1, \quad \dots, \quad y(n-1)=y_{n-1}. \quad (2.241)$$

Иными словами, мы решаем для разностного уравнения задачу, аналогичную задаче Коши в теории дифференциальных уравнений (§ 7).

Составим *изображающее уравнение* для разностного уравнения (240) и условий (241). По (222) получим:

$$\begin{aligned} & \overset{*}{Y}(p)(e^{np} + a_1 e^{(n-1)p} + \dots + a_{n-1} e^p + a_n) = \\ & = (e^p - 1)[y_0(e^{(n-1)p} + a_1 e^{(n-2)p} + \dots + a_{n-1}) + \\ & + y_1(e^{(n-2)p} + \dots + a_{n-2}) + \dots + y_{n-1}] + \overset{*}{F}(p), \end{aligned} \quad (2.242)$$

и замечая, что по (245), (246) и теореме запаздывания (223)

$$\frac{(e^p - 1)e^{-p}}{\Delta(e^p)} = e^{-p} \Psi_{n-1}^*(p) \rightarrow \psi_{n-1}[x - 1],$$

получаем

$$\varphi(x) = \sum_{k=0}^{[a]} f(k) \psi_{n-1}[x - 1 - k]. \quad (2.249)$$

2°. Ограничиваясь этими замечаниями общего характера, приведём для иллюстрации несколько примеров.

$$\begin{aligned} 1. \quad y[x+4] + 2y[x+3] + \\ + 3y[x+2] + 2y[x+1] + y[x] = 0^1 \\ y_0 = y_1 = y_3 = 0; \quad y_2 = 1. \end{aligned}$$

В данном случае

$$\begin{aligned} \Delta(e^p) &= e^{4p} + 2e^{3p} + 3e^{2p} + 2e^p + 1 = (e^{2p} + e^p + 1)^2, \\ \Delta_2(e^p) &= e^p + 2. \end{aligned}$$

Разложим на простейшие дроби выражение

$$\frac{z+2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} = \frac{A}{(z-\alpha)^2} + \frac{B}{(z-\beta)^2} + \frac{C}{z-\alpha} + \frac{D}{z-\beta}.$$

Здесь

$$\begin{aligned} A &= \left[\frac{z+2}{(z-\beta)^2} \right]_{z=\alpha} = \frac{\alpha+2}{(\alpha-\beta)^2}, \\ C &= \left[\frac{d}{dz} \frac{z+2}{(z-\beta)^2} \right]_{z=\alpha} = -\frac{\alpha+\beta+4}{(\alpha-\beta)^3}. \end{aligned}$$

Коэффициенты B и D получаются отсюда переменной местами букв α и β . Итак,

$$\begin{aligned} \frac{z+2}{(z-\alpha)^2(z-\beta)^2} &= \frac{1}{(\alpha-\beta)^2} \left[\frac{\alpha+2}{(z-\alpha)^2} + \frac{\beta+2}{(z-\beta)^2} \right] - \\ &\quad - \frac{\alpha+\beta+4}{(\alpha-\beta)^3} \left(\frac{1}{z-\alpha} - \frac{1}{z-\beta} \right). \end{aligned}$$

В рассматриваемом примере

$$\Psi_2^*(p) = \Psi_2(p) = \frac{(e^p - 1)(e^p + 2)}{(e^{2p} + e^p + 1)^2} = \frac{(e^p - 1)(e^p + 2)}{\left(e^p - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2 \left(e^p - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^2}$$

¹ А. А. Марков, Исчисление конечных разностей. 1910.

и по приведённой выше формуле

$$\begin{aligned} Y^*(p) = & -\frac{e^p - 1}{4 \sin^2 \frac{2\pi}{3}} \left[\frac{e^{\frac{2\pi i}{3}} + 2}{\left(e^p - e^{\frac{2\pi i}{3}}\right)^2} + \frac{e^{-\frac{2\pi i}{3}} + 2}{\left(e^p - e^{-\frac{2\pi i}{3}}\right)^2} \right] + \\ & + \frac{2 \cos \frac{2\pi}{3} + 4}{8i \sin^3 \frac{2\pi}{3}} (e^p - 1) \left(\frac{1}{e^p - e^{\frac{2\pi i}{3}}} - \frac{1}{e^p - e^{-\frac{2\pi i}{3}}} \right). \end{aligned}$$

Начальные функции, соответствующие этим изображениям, находим по (232), (233). После простых вычислений получим

$$y[x] = -\frac{2[x-1]}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi[x]}{3} = \begin{cases} 0 & \text{при } x = 3k \\ -x+1 & \text{„ } x = 3k+1 \\ x-1 & \text{„ } x = 3k+2 \end{cases}$$

2. Найти общее выражение для коэффициентов разложения дроби

$$\frac{b_{n-1}t^{n-1} + b_{n-2}t^{n-2} + \dots + b_1t + b_0}{a_nt^n + a_{n-1}t^{n-1} + \dots + a_1t + a_0}$$

в ряд по степеням t .

Покажем, что эта задача сводится к решению разностного уравнения. Записывая искомым ряд в форме

$$y_0 + y_1t + y_2t^2 + \dots + y_wt^w + \dots,$$

имеем

$$\begin{aligned} b_0 + b_1t + \dots + b_{n-2}t^{n-2} + b_{n-1}t^{n-1} = \\ = (y_0 + y_1t + \dots + y_wt^w + \dots)(a_0 + a_1t + a_{n-1}t^{n-1} + a_nt^n). \end{aligned}$$

Сравнивая коэффициенты при t^k ($k = 0, 1, 2, \dots, n-1$), получаем систему уравнений:

$$y_0a_0 = b_0$$

$$y_0a_1 + y_1a_0 = b_1$$

$$\dots \dots \dots$$

$$y_{n-1}a_0 + y_{n-2}a_1 + \dots + y_1a_{n-2} + y_0a_{n-1} = b_{n-1},$$

из которой последовательно находим $y_0, y_1, \dots, y_{n-1}$.

Сравнивая далее коэффициенты при t^{x+n} , получаем

$$a_0 y_{x+n} + a_1 y_{x+n-1} + \dots + a_{n-1} y_{x+1} + a_n y_x = 0.$$

Поставленная задача сводится к решению этого разностного уравнения при указанных начальных условиях.

Пусть, например, ищется разложение в ряд по степеням t выражения:

$$\frac{1}{t^2 + t + 1} = y_0 + y_1 t + \dots + y_x t^x + \dots$$

Поступая, как указано, приходим к разностному уравнению:

$$y[x+2] + y[x+1] + y[x] = 0$$

с начальными условиями

$$y(0) = 1, \quad y(1) = -1.$$

Изображающее уравнение будет

$$Y^*(p)(e^{2p} + e^p + 1) = (e^p - 1)e^p$$

и, значит:

$$Y^*(p) = \frac{(e^p - 1)e^p}{e^{2p} + e^p + 1}.$$

По (235) находим начальную функцию для изображения

$$\frac{e^p - 1}{e^{2p} + e^p + 1} = \frac{2}{\sqrt{3}} \frac{(e^p - 1) \sin \frac{2\pi}{3}}{e^{2p} - 2 \cos \frac{2\pi}{3} \cdot e^p + 1} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3} [x]$$

и по (221) получаем:

$$Y^*(p) \rightarrow \frac{2}{\sqrt{3}} \sin \frac{2\pi}{3} [x+1] = \begin{cases} 1 & \text{при } x=3k, \\ -1 & \text{„ } x=3k+1, \\ 0 & \text{„ } x=3k+2. \end{cases}$$

3. Найти решение неоднородного разностного уравнения

$$y[x+2] - 3y[x+1] + 2y[x] = 2^{[x]}$$

при условии $y(0) = y(1) = 0$.

Имеем

$$Y^*(p)(e^{2p} - 3e^p + 2) = \frac{e^p - 1}{e^p - 2}, \quad Y^*(p) = \frac{1}{(e^p - 2)^2}.$$

Находим разложение на простейшие дроби

$$\frac{1}{(e^p - 2)^2 (e^p - 1)} = \frac{1}{(e^p - 2)^2} - \frac{1}{e^p - 2} + \frac{1}{e^p - 1}$$

и, следовательно:

$${}^*Y(p) = 1 - \frac{e^p - 1}{e^p - 2} + \frac{e^p - 1}{(e^p - 2)^2} \rightarrow 1 - 2[x] + \frac{1}{2}[x] 2^{[x]}.$$

4. В заключение приведём пример системы разностных уравнений:

$$y[x+1] = z[x] + u[x]$$

$$z[x+1] = u[x] + y[x]$$

$$u[x+1] = y[x] + z[x]$$

с начальными условиями $y(0) = 1$, $z(0) = u(0) = 0$.

Изображающая система будет

$$-e^p {}^*Y(p) + {}^*Z(p) + {}^*U(p) = -(e^p - 1),$$

$${}^*Y(p) - e^p {}^*Z(p) + {}^*U(p) = 0,$$

$${}^*Y(p) + {}^*Z(p) - e^p {}^*U(p) = 0.$$

Из неё получаем

$${}^*Y(p) = \frac{(e^p - 1)(e^{2p} - 1)}{(e^p + 1)^2 (e^p - 2)} = \frac{(e^p - 1)^2}{(e^p + 1)(e^p - 2)} \text{ и т. д.}$$

Составляем разложение на простейшие дроби

$$\frac{e^p - 1}{(e^p + 1)(e^p - 2)} = \frac{1}{3} \left(\frac{2}{e^p + 1} + \frac{1}{e^p - 2} \right)$$

и находим

$${}^*Y(p) = \frac{1}{3} \left[\frac{2(e^p - 1)}{e^p + 1} + \frac{e^p - 1}{e^p - 2} \right] \rightarrow \frac{1}{3} [2(-1)^{[x]} + 2^{[x]}] = y[x].$$

Аналогично находятся $u[x]$, $z[x]$.

ГЛАВА III

ПРИЛОЖЕНИЯ ОПЕРАЦИОННОГО ИСЧИСЛЕНИЯ К ЗАДАЧАМ МЕХАНИКИ И СОПРОТИВЛЕНИЯ МАТЕРИАЛОВ

§ 16. Колебания простейшего вибратора

1°. Движение материальной точки под действием силы, зависящей от времени. Дифференциальное уравнение движения имеет вид:

$$m\ddot{x} = f(t). \quad (3.1)$$

Его изображение будет:

$$mp^2X(p) = mp^2x_0 + mp\dot{x}_0 + F(p), \quad (3.2)$$

где x_0 и $\dot{x}_0$ — начальные значения x и $\dot{x}$. Это же изображающее уравнение можно получить, предполагая, что при нулевых начальных значениях координаты и скорости к точке в момент $t=0$ прикладывается импульс $m\dot{x}_0\sigma_1(t)$, сообщающий ей скорость $\dot{x}_0$, и два направленных в противоположные стороны равных по величине импульсивных толчка, сообщающих ей мгновенно перемещение x_0 (§ 6).

Из (2), переходя к начальным функциям по (1.34), получим:

$$x = x_0 + \dot{x}_0 t + \frac{1}{m} \int_0^t f(\tau) (t - \tau) d\tau. \quad (3.3)$$

Конечно, этот результат столь же просто получается без применения операционного метода, но даже и в рассматриваемой простейшей задаче можно указать класс сил, для

которых операционное решение наиболее просто и быстро приводит к цели.

Рассмотрим, например, действие силы, закон изменения которой во времени задан графически (трапеция на рис. 12, 1). Изображение $F(p)$ даётся формулой (1.94):

$$F(p) = \frac{f_0}{p} \left[\frac{1}{\tau_1} (1 - e^{-p\tau_1}) + \frac{1}{\tau_3 - \tau_2} (e^{-p\tau_3} - e^{-p\tau_2}) \right] \rightarrow f(t). \quad (3.4)$$

Полагая для простоты письма $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, получаем

$$X(p) = \frac{F(p)}{mp^2}, \quad (3.5)$$

и закон движения даётся формулами:

$$\left. \begin{aligned} & \frac{f_0 t^3}{6m\tau_1} && \text{при } t \leq \tau_1 \\ & \frac{f_0}{6m\tau_1} [t^3 - (t - \tau_1)^3] && \text{„ } \tau_1 \leq t \leq \tau_2 \\ & \frac{f_0}{6m} \left\{ \frac{1}{\tau_1} [t^3 - (t - \tau_1)^3] - \frac{1}{\tau_2 - \tau_3} (t - \tau_2)^3 \right\} && \text{„ } \tau_2 \leq t \leq \tau_3 \\ & \frac{f_0}{6m} \left\{ \frac{1}{\tau_1} [t^3 - (t - \tau_1)^3] + \right. \\ & \quad \left. + \frac{1}{\tau_2 - \tau_3} [(t - \tau_2)^3 - (t - \tau_3)^3] \right\} = \\ & = \frac{f_0}{6m} [\tau_1^2 - \tau_2^2 - \tau_3^2 - \tau_3\tau_2 + 3(\tau_2 + \tau_3 - \tau_1)t] \\ & && \text{при } \tau_3 \leq t \end{aligned} \right\} \quad (3.6)$$

Как и следовало ожидать, при $t \geq \tau_3$, т. е. когда сила прекратила действовать, движение происходит с постоянной скоростью, величину которой $\frac{f_0}{2m} (\tau_2 + \tau_3 - \tau_1)$ можно было бы определить, как частное от деления импульса силы за время действия её (т. е. площади трапеции) на массу.

Как второй пример рассмотрим движение точки при действии повторяющихся через промежуток времени T импульсов S , направленных в противоположные стороны. Полагаем $x_0 = \dot{x}_0 = 0$; уравнение движения можно написать в виде:

$$m\ddot{x} = S [\sigma_1(t) - \sigma_1(t - T) + \sigma_1(t - 2T) - \dots], \quad (3.7)$$

Изображение искомой функции $x(t)$ по (1.113) будет:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{1}{p^2} \frac{S}{m} p [1 - e^{-pT} + e^{-2pT} - \dots] = \\ &= \frac{S}{2mp} \left(1 + \operatorname{th} \frac{pT}{2} \right). \end{aligned}$$

По (1.88) имеем:

$$\frac{1}{p} \operatorname{th} \frac{pT}{2} \rightarrow \varphi_4(t),$$

где график функции $\varphi_4(t)$ — „равноскатная крыша“ — изображён на рис. 10. Получаем

$$x(t) = \frac{S}{2m} [t + \varphi_4(t)]. \quad (3.8)$$

График движения изображён на рис. 18; его можно было бы построить также из простейших механических соображе-

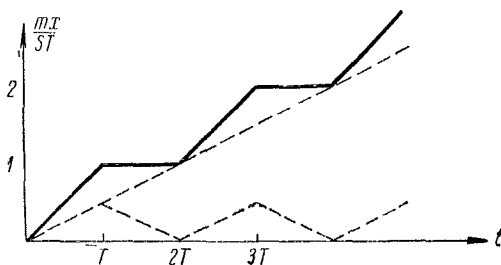


Рис. 18. Движение точки под действием периодических импульсов, направленных в противоположные стороны.

ний: получив первый импульс в момент $t = +0$, точка начинает двигаться с постоянной скоростью $\frac{S}{m}$; в момент $T = +0$, когда сообщается импульс S противоположного направления, происходит остановка до момента $2T + 0$ сообщения следующего импульса и т. д.

Рассмотрим теперь более общую задачу. Предположим, что действующая на точку сила $\psi(t)$ является периодической функцией времени с периодом T , принимающей при

$0 < t < T$ значения $f(t)$. При $t < T$ закон движения точки, очевидно, выражается формулой (3), а её скорость будет

$$\dot{x}(t) = \dot{x}_0 + \frac{1}{m} \int_0^t f(\tau) d\tau. \quad (3.9)$$

Движение не будет, вообще говоря, периодическим. Оно станет таким, если значения x и $\dot{x}$ в момент $t = T$ окажутся равными их значениям в начальный момент времени:

$$x(0) = x(T), \quad \dot{x}(0) = \dot{x}(T). \quad (3.10)$$

Второе из этих условий после подстановки в (9) даёт *условие осуществимости периодического движения*

$$\int_0^T f(\tau) d\tau = 0, \quad (3.11)$$

выражающее, что импульс силы за период времени T должен обращаться в нуль — в противном случае, конечно, скорость при $t = T$ не может получить значения $\dot{x}_0$. Первое соотношение (10) при соблюдении условия (11) даёт теперь значение $\dot{x}_0$:

$$\dot{x}_0 = \frac{1}{mT} \int_0^T \tau f(\tau) d\tau. \quad (3.12)$$

Постоянная x_0 остаётся неопределённой и искомое периодическое движение по (3) и (12) при $0 < t < T$ определится формулой:

$$x(t) = x_0 + \frac{t}{mT} \int_0^T f(\tau) \tau d\tau + \frac{1}{m} \int_0^T f(\tau) (t - \tau) d\tau. \quad (3.13)$$

На этом простом примере выясняется смысл формального приёма отыскания периодического решения, изложенного в § 8, 5°; в частности, становится ясным выведенное там условие (2.62) существования периодического решения при наличии нулевого корня характеристического уравнения.

2°. Рассмотрим задачу о колебаниях простейшего вибратора: к концу ненапряжённой пружины, массой которой пренебрегаем, внезапно подвешивается груз $P = mg$, причём одновременно этому грузу сообщаются отклонение x_0 и скорость $\dot{x}_0$. Уравнение движения груза, в соответствии со сказанным в § 6, можно представить в виде:

$$m\ddot{x} + cx = mg\sigma_0(t) + m\dot{x}_0\sigma_1(t) + mx_0\sigma_2(t), \quad (3.14)$$

где c — жёсткость пружины, x — её удлинение. Изображение этого уравнения будет:

$$(mp^2 + c)X(p) = mg + m\dot{x}_0p + mx_0p^2,$$

откуда

$$X(p) = \frac{g}{p^2 + k^2} + \frac{\dot{x}_0p + x_0p^2}{p^2 + k^2},$$

где $k = \sqrt{\frac{c}{m}}$ — частота свободных колебаний. Замечая, что

$$\frac{1}{p^2 + k^2} = \frac{1}{k^2} \left(1 - \frac{p^2}{p^2 + k^2} \right) \rightarrow \frac{1}{k^2} (1 - \cos kt),$$

воспользовавшись IV табл. 2, получаем известное решение:

$$x(t) = \frac{g}{k^2} (1 - \cos kt) + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + x_0 \cos kt. \quad (3.15)$$

3°. Теперь рассмотрим случай приложения к грузу силы $f(t)$, зависящей от времени: будем отсчитывать x от положения равновесия груза; тогда уравнение движения будет:

$$\ddot{x} + k^2x = \frac{f(t)}{m},$$

значит:

$$X(p) = \frac{x_0p^2 + \dot{x}_0p}{p^2 + k^2} + \frac{1}{mpk} F(p) \frac{pk}{p^2 + k^2}. \quad (3.16)$$

По теореме свёртывания X табл. 1 сразу же получаем:

$$x = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{1}{mk} \int_0^t f(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \quad (3.17)$$

Этот результат обычно получают более длинным путем, применяя метод вариации произвольных постоянных.

Рассмотрим (полагая для сокращения $x_0 = \dot{x}_0 = 0$) частный случай действия *синусоидальной силы*:

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t + \alpha).$$

Не следует прибегать к вычислению интеграла (17), так как гораздо проще непосредственно найти начальную функцию для изображения (16); последнее в данном случае будет:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{f_0}{m} \left[\frac{\omega p}{(\omega^2 + p^2)(p^2 + k^2)} \cos \alpha + \frac{p^2}{(\omega^2 + p^2)(p^2 + k^2)} \sin \alpha \right] = \\ &= \frac{f_0}{m(k^2 - \omega^2)} \left[\left(\frac{\omega p}{\omega^2 + p^2} - \frac{\omega p}{p^2 + k^2} \right) \cos \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(\frac{p^2}{\omega^2 + p^2} - \frac{p^2}{p^2 + k^2} \right) \sin \alpha \right] \div \frac{f_0}{m(k^2 - \omega^2)} \times \\ &\quad \times \left[\sin(\omega t + \alpha) - \left(\frac{\omega}{k} \sin kt \cos \alpha + \cos kt \sin \alpha \right) \right]. \quad (3.18) \end{aligned}$$

Таково решение при $k \neq \omega$. В случае резонанса ($\omega = k$) имеем:

$$X(p) = \frac{f_0}{m} \left[\frac{\omega p \cos \alpha}{(p^2 + \omega^2)^2} + \frac{p^2 \sin \alpha}{(p^2 + \omega^2)^2} \right]. \quad (3.19)$$

По IV табл. 2 имеем:

$$\begin{aligned} \frac{p^2}{(p^2 + \omega^2)^2} &\div \frac{t \sin \omega t}{2\omega}, \\ \frac{p(p^2 - \omega^2)}{(p^2 + \omega^2)^2} &= \frac{p}{p^2 + \omega^2} - \frac{2\omega^2 p}{(p^2 + \omega^2)^2} \div t \cos \omega t \end{aligned}$$

и, следовательно:

$$\frac{\omega p}{(\omega^2 + p^2)^2} \div \frac{1}{2\omega} \left(\frac{\sin \omega t}{\omega} - t \cos \omega t \right). \quad (3.20)$$

Итак, при резонансе движение происходит по закону:

$$x(t) = \frac{f_0}{2m\omega^2} [\sin \omega t \cos \alpha - \omega t \cos(\omega t + \alpha)]. \quad (3.21)$$

4°. Рассмотрим теперь задачу о движении вибратора — груза, подвешенного к пружине — под действием

периодически повторяющихся импульсов величины S . Уравнение движения имеет вид:

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{S}{m} [\sigma_1(t) + \sigma_1(t-T) + \dots]. \quad (3.22)$$

Изображающее уравнение при начальных условиях $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ будет:

$$\begin{aligned} (p^2 + k^2) X(p) &= p^2 x_0 + p \dot{x}_0 + \frac{Sp}{m} (1 + e^{-pT} + e^{-2pT} + \dots) = \\ &= p^2 x_0 + p \dot{x}_0 + \frac{Sp}{m(1 - e^{-pT})} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$X(p) = \frac{\Theta(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (3.23)$$

где

$$\Theta(p) = \frac{p^2 x_0 + p \dot{x}_0}{p^2 + k^2} (1 - e^{-pT}) + \frac{S}{m} \frac{p}{p^2 + k^2}. \quad (3.24)$$

Применим общий приём разыскания периодического решения (§ 8, 5°) к рассматриваемому случаю. Нужно так определить x_0 и $\dot{x}_0$, чтобы начальная функция $\vartheta(t) \leftarrow \Theta(p)$ обращалась тождественно в нуль при $t > T$. Имеем при $t > T$:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= x_0 [\cos kt - \cos k(t-T)] + \frac{\dot{x}_0}{k} [\sin kt - \sin k(t-T)] + \\ &+ \frac{S}{mk} \sin kt = \cos kt \left[x_0 (1 - \cos kT) + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kT \right] + \\ &+ \sin kt \left[-x_0 \sin kT + \frac{\dot{x}_0}{k} (1 - \cos kT) + \frac{S}{mk} \right] \end{aligned}$$

и, значит:

$$\begin{aligned} x_0 (1 - \cos kT) + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kT &= 0, \\ -\dot{x}_0 \sin kT + \frac{\dot{x}_0}{k} (1 - \cos kT) &= -\frac{S}{mk}. \end{aligned}$$

Отсюда при $\frac{kT}{2} \neq m\pi$ (m — целое число), т. е. при несовпадении частоты свободных колебаний с целым кратным частоты импульсов (при отсутствии резонанса), получаем:

$$x_0 = \frac{S}{2mk} \operatorname{ctg} \frac{kT}{2}, \quad \frac{\dot{x}_0}{k} = -\frac{S}{2mk}. \quad (3.25)$$

Эти значения x_0 и $\dot{x}_0$ подставляем в (24). Тогда

$$\Theta(p) = \frac{S}{2mk} \left[\left(\frac{p^2}{p^2 + k^2} \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} - \frac{pk}{p^2 + k^2} \right) (1 - e^{-pT}) + \frac{2pk}{p^2 + k^2} \right]. \quad (3.26)$$

Теперь найдём соответствующую начальную функцию $\vartheta(t)$ при $0 < t < T$; это определит значение искомого периодического решения для первого периода

$$x(t) = \frac{S}{2mk} \left(\cos kt \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} + \sin kt \right). \quad (3.27)$$

Чтобы найти $x(t)$ в любой момент времени, достаточно график функции (27) продолжить периодически в соответствующий промежуток. Полученная формула выделяет те слагаемые общего решения, которые соответствуют чисто вынужденным колебаниям, т. е. движениям вибратора, имеющим период прикладываемых импульсов. Это движение возникает, таким образом, при специально подбираемых начальных условиях (25).

Заметим ещё, что по (26) и (23) изображение чисто вынужденных колебаний даётся формулой

$$X(p) = \frac{S}{2mk} \left(\frac{p^2}{p^2 + k^2} \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} + \frac{pk}{p^2 + k^2} \frac{1 + e^{-pT}}{1 - e^{-pT}} \right). \quad (3.28)$$

Поставим теперь вопрос, как будет протекать движение при начальных условиях, отличных от (25), например, при $x_0 = \dot{x}_0 = 0$.

Изображение $x(t)$ в этом случае будет:

$$X(p) = \frac{S}{mk} \cdot \frac{pk}{p^2 + k^2} \cdot \frac{1}{1 - e^{-pT}}. \quad (3.29)$$

Соответствующее движение содержит как чисто вынужденные колебания, имеющие изображение (28), так и колебания свободные, имеющие частоту k . Изображение этих последних $X_1(p)$ поэтому получится, если вычесть (28) из (29); получаем:

$$X_1(p) = \frac{S}{2mk} \left(\frac{pk}{p^2 + k^2} - \frac{p^2}{p^2 + k^2} \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} \right)$$

и, следовательно, колебания частоты k даются выражением:

$$x_1(t) = \frac{S}{2mk} \left(\sin kt - \cos kt \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} \right). \quad (3.30)$$

Резюмируем: под действием периодически прикладываемых импульсов движение вибратора складывается: из свободных колебаний частоты k , даваемых формулой (30) для любого t , и из вынужденных колебаний, имеющих частоту импульсов, определяемых при $0 < t < T$ выражением (27), а при любом t — из условий периодичности этого выражения.

При произвольных начальных значениях x и $\dot{x}$ к выражению свободных колебаний (30) добавляется слагаемое

$$x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt.$$

5°. В качестве второго примера рассмотрим задачу о колебаниях вибратора, когда прикладываемые через промежуток времени T импульсы S имеют противоположные направления. Период импульсов равен $2T$. Будем искать периодическое движение вибратора этого же периода, меняющее знак через полу-период T .

Дифференциальное уравнение движения будет:

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{S}{m} [\sigma_1(t) - \sigma_1(t - T) + \sigma_1(t - 2T) - \dots]. \quad (3.31)$$

Его изображение имеет вид:

$$(p^2 + k^2) X(p) = p^2 x_0 + p \dot{x}_0 + \frac{Sp}{m(1 + e^{-pT})}. \quad (3.32)$$

Применяя указанный выше приём нахождения периодического решения, напомним:

$$X(p) = \frac{\Theta(p)}{1 + e^{-pT}},$$

$$\Theta(p) = \frac{p^2 x_0 + p \dot{x}_0}{p^2 + k^2} (1 + e^{-pT}) + \frac{S}{mk} \frac{pk}{p^2 + k^2}. \quad (3.33)$$

Нужно потребовать, чтобы при $t > T$ начальная функция $\vartheta(t) \leftarrow \Theta(p)$ обращалась в нуль тождественно:

$$x_0 [\cos kt + \cos k(t-T)] + \frac{\dot{x}_0}{k} [\sin kt + \sin k(t-T)] + \frac{S}{mk} \sin kt = 0.$$

Приравнивая нулю коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$, получаем значения x_0 и $\dot{x}_0$:

$$x_0 = -\frac{S}{2mk} \operatorname{tg} \frac{kT}{2}, \quad \dot{x}_0 = -\frac{S}{2mk}.$$

Эти решения x_0 и $\dot{x}_0$ подставляем в выражение $\Theta(p)$, после чего находим изображение искомого периодического решения:

$$X(p) = \frac{S}{2mk} \left(\frac{pk}{p^2 + k^2} \frac{1 - e^{-pT}}{1 + e^{-pT}} - \frac{p^2}{p^2 + k^2} \operatorname{tg} \frac{kT}{2} \right), \quad (3.34)$$

и при $t < T$ соответствующая начальная функция будет:

$$x(t) = \frac{S}{2mk} \left(\sin kt - \cos kt \operatorname{tg} \frac{kT}{2} \right) = \frac{S \sin k \left(t - \frac{T}{2} \right)}{2mk \cos \frac{kT}{2}}. \quad (3.35)$$

При $T < t < 2T$ значение $x(t)$ находится из условия

$$x(t) = -x(t-T), \quad (3.36)$$

и далее, при любом T определяется из условия периодичности:

$$x(t) = x(t-2mT). \quad (3.37)$$

Периодический режим движения получается, таким образом, при определённых начальных значениях x_0 и $\dot{x}_0$. Он может иметь место при отсутствии резонанса, т. е. при

$$\frac{kT}{2} \neq \frac{2m+1}{2} \pi \quad (3.38)$$

(m — целое число), когда $\operatorname{tg} \frac{kT}{2}$ в выражении (35) сохраняет конечное значение.

При произвольных начальных значениях нужно возвратиться к выражению изображения, полученному из (32):

$$X(p) = \frac{p^2 x_0 + p \dot{x}_0}{p^2 + k^2} + \frac{Sp}{m(p^2 + k^2)(1 + e^{-pT})}. \quad (3.39)$$

Вычитая из него правую часть (34), получим изображение свободных колебаний (частоты k):

$$\begin{aligned} X_1(p) &= \frac{p^2 x_0 + p \dot{x}_0}{p^2 + k^2} + \frac{S}{2mk} \left(\frac{pk}{p^2 + k^2} + \frac{p^2}{p^2 + k^2} \operatorname{tg} \frac{kT}{2} \right) \div \rightarrow \\ &\div \rightarrow x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt + \frac{S \sin k \left(t + \frac{T}{2} \right)}{2mk \cos \frac{kT}{2}} \quad (t > 0). \end{aligned} \quad (3.40)$$

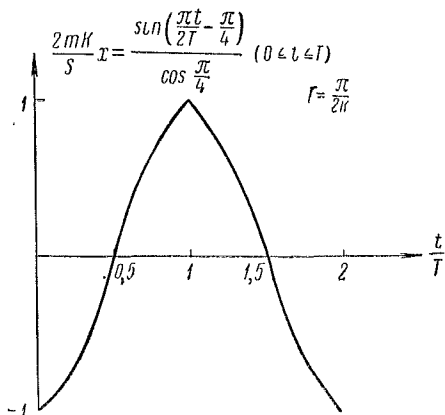


Рис. 19. Вынужденное колебание вибратора под действием противоположно направленных периодических импульсов

$$\left(T = \frac{\pi}{2k} \right).$$

График вынужденного колебания при $T = \frac{T_0}{4}$ и $T = T_0$ (где $T_0 = \frac{2\pi}{k}$ — период свободных колебаний), полученный на основании формул (35) и (36), представлен на рис. 19 и 20.

Наличие угловых точек на графиках объясняется, конечно, разрывами скорости в моменты приложения импульсов.

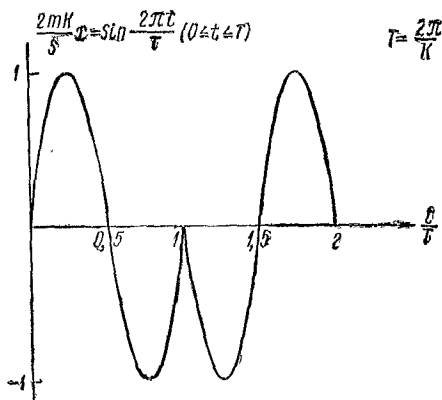


Рис. 20. Вынужденные колебания вибратора под действием противоположно направленных периодических импульсов

$$\left(T = \frac{2\pi}{k}\right).$$

Особенно прост случай, представленный на рис. 20. Имеем $T = T_0$, и выражения для свободных $x_1(t)$ и вынужденных $x_2(t)$ колебаний по (40) и (35) будут:

$$x_1(t) = \frac{S}{2mk} \sin \frac{2\pi t}{T} \quad (t > 0)$$

$$x_2(t) = \begin{cases} \frac{S}{2mk} \sin \frac{2\pi t}{T} & (0 < t < T) \\ -\frac{S}{2mk} \sin \frac{2\pi t}{T} & (T < t < 2T) \end{cases}$$

и т. д.

В результате наложения этих колебаний возникает движение:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{S}{mk} \sin \frac{2\pi t}{T} & (0 < t < T) \\ 0 & (T < t < 2T) \end{cases} \quad (3.41)$$

и т. д.

что можно получить также, найдя начальную функцию для изображения (32) при $x_0 = \dot{x}_0 = 0$.

Полученный результат легко было предвидеть: первый импульс S сообщает вибратору начальную скорость $\frac{S}{m}$, в результате чего возникает движение, даваемое первой строкой (41); в момент $t = T$ имеем $x(T) = 0$, $\dot{x}(T) = \frac{S}{m}$ и под действием импульса ($-S$) вибратор останавливается до момента $t = 2T + 0$, когда ему снова сообщается та же скорость $\frac{S}{m}$, и т. д.

6°. Рассмотрим движение вибратора под действием силы $\psi(t) = f_0 |\sin \omega t|$. Формула (1.102) даёт изображение этой периодической (с периодом $\frac{\pi}{\omega}$) функции:

$$f_0 |\sin \omega t| \longleftrightarrow f_0 \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} \frac{1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}}}{1 - e^{-\frac{\pi p}{\omega}}}.$$

Уравнение движения будет

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{f_0}{m} |\sin \omega t|.$$

Соответствующее изображающее уравнение даёт значение $X(p) \longleftrightarrow x(t)$:

$$X(p) = \frac{\Theta(p)}{1 - e^{-\frac{p\pi}{\omega}}}, \quad (3.42)$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Theta(p) = & \frac{x_0 p^2 + \dot{x}_0 p}{p^2 + k^2} \left(1 - e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right) + \\ & + \frac{f_0}{m} \frac{\omega p \left(1 + e^{-\frac{p\pi}{\omega}}\right)}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + k^2)}. \end{aligned} \quad (3.43)$$

Для разыскания периодического движения с периодом $\frac{\pi}{\omega}$ (вынужденных колебаний) определяем x_0 и $\dot{x}_0$ из условия

гождественного обращения в нуль $\vartheta(t) \leftarrow \Theta(p)$ при $t > \frac{\pi}{\omega}$:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) = x_0 \left[\cos kt - \cos k \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] + \frac{\dot{x}_0}{k} \left[\sin kt - \right. \\ \left. - \sin k \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] + \frac{f_0}{m(k^2 - \omega^2)} \left\{ \left[\sin \omega t + \right. \right. \\ \left. \left. + \sin \omega \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] - \frac{\omega}{k} \left[\sin kt + \sin k \left(t - \frac{\pi}{\omega} \right) \right] \right\} \equiv 0. \end{aligned}$$

Находим:

$$x_0 = \frac{f_0 \omega}{mk(\omega^2 - k^2)} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2\omega}, \quad \dot{x}_0 = 0.$$

Подстановка в выражения (42) и (43) даёт искомое изображение вынужденных колебаний вибратора:

$$\begin{aligned} X(p) = \frac{f_0 \omega}{m(\omega^2 - k^2)} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2\omega} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} + \\ + \frac{f_0}{m} \frac{\omega p \left(1 + e^{-\frac{\pi p}{\omega}} \right)}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + k^2) \left(1 - e^{-\frac{\pi p}{\omega}} \right)}. \end{aligned} \quad (3.44)$$

Отсюда при $0 < t < \frac{\pi}{\omega}$ находим:

$$x(t) = \frac{f_0}{m(\omega^2 - k^2)} \left[\frac{\omega}{k} \left(\sin kt + \cos kt \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2\omega} \right) - \sin kt \right]. \quad (3.45)$$

При $\frac{k\pi}{2\omega}$ равном целому кратному π , т. е. при $\omega = \frac{k}{2}, \frac{k}{4}$ и т. д., имеет место резонанс, и периодическое решение не существует; при $\omega = k$ выражение (44) принимает неопределённый вид; раскрыв неопределённость, получим:

$$x(t) = \frac{f_0}{2mk^2} \left[\sin kt + \left(\frac{\pi}{2} - kt \right) \cos kt \right]. \quad (3.46)$$

Наличие множителя kt вне знака тригонометрической функции в данном случае не указывает, что имеет место резонанс, так как выражение (46) даёт значения $x(t)$ лишь для $0 < t < \frac{\pi}{k}$. Действительно, $x(t)$ — периодическая функция, имеющая при $\omega = k$ период $\frac{\pi}{k}$; построив её график

для $0 < t < \frac{\pi}{k}$, мы определим тем самым её значение в любой момент времени; поэтому амплитуда вынужденного колебания, несмотря на наличие множителя kt , остаётся ограниченной.

Выражение (45), дающее вынужденные колебания, представляет частное решение исходного дифференциального уравнения при определённых начальных условиях, полученных выше.

Чтобы получить решение при любых начальных условиях, нужно вернуться к общим выражениям (42) и (43)

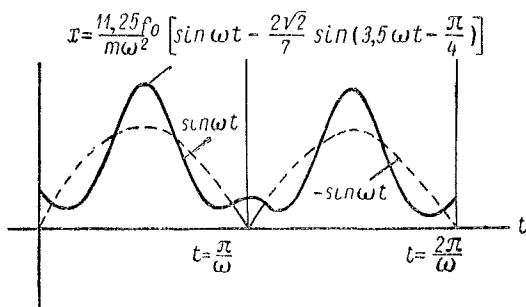


Рис. 21. Вынужденные колебания вибратора под действием выпрямленной синусоидальной силы ($k = 3,5 \omega$).

для изображения $X(p)$. Соответствующая ему начальная функция представляет движение, являющееся наложением вынужденных и свободных колебаний (частоты k). Поэтому можно получить изображение $X_1(p)$ свободных колебаний, вычитая правую часть (44) из (42):

$$\begin{aligned}
 X_1(p) &= \frac{x_0 p^2 + x_0 p}{p^2 + k^2} - \frac{f_0 \omega}{mk(\omega^2 - k^2)} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2\omega} \frac{p^2}{p^2 + k^2} \rightarrow \\
 &\rightarrow x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \\
 &- \frac{f_0 \omega}{mk(\omega^2 - k^2)} \operatorname{ctg} \frac{k\pi}{2\omega} \cos kt = x_1(t) \quad (3.47)
 \end{aligned}$$

(для любого $t > 0$). В частности, при $\omega = k$, раскрывая неопределённость, найдём

$$x_1(t) = x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \frac{f_0 \pi}{4k^2 m} \cos kt.$$

На рис. 21 и 22 приведены графики вынужденных колебаний под действием „выпрямленной синусоидальной силы“, построенные по (45) при $k = 3,5\omega$ и по (46) при $k = \omega$.¹

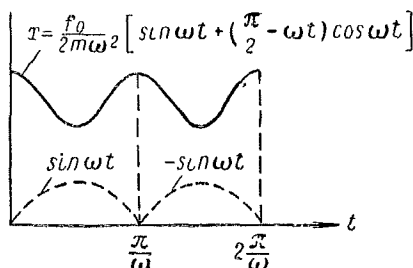


Рис. 22. Вынужденные колебания вибратора под действием выпрямленной синусоидальной силы ($k = \omega$).

7°. Обобщая сказанное, рассмотрим в заключение задачу о разделении вынужденных и свободных колебаний вибратора, находящегося под действием произвольной периодической возмущающей силы:

$$\psi(t) = \psi(t + T) \leftarrow \frac{F(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (3.48)$$

где по (1.97):

$$F(p) \rightarrow \begin{cases} f(t) & \text{при } t < T \\ 0 & \text{„ } t > T \end{cases}$$

¹ Большое число аналогичных примеров рассмотрено без применения операционного исчисления А. Н. Обморшевым в работе „Вынужденные колебания системы с одной степенью свободы в случае прерывистого изменения возмущающей силы“. Труды Московского механико-машиностр. ин-та им. Баумана, № 65/5, Машгиз, 1940.

Дифференциальное уравнение движения вибратора будет

$$\ddot{x} + k^2 x = \frac{1}{m} \psi(t)$$

и изображение $X(p) \xrightarrow{\div} x(t)$ искомого решения будет:

$$\begin{aligned} X(p) &= \frac{\Theta(p)}{1 - e^{-pT}}, \\ \Theta(p) &= \frac{x_0 p^2 + \dot{x}_0 p}{p^2 + k^2} (1 - e^{-pT}) + \frac{1}{m} \frac{F(p)}{p^2 + k^2}. \end{aligned} \quad (3.49)$$

Для выделения той части решения, которая имеет период T возмущающей силы, нужно в соответствии со сказанным в § 8, 5°, так подобрать начальные данные x_0 и $\dot{x}_0$, чтобы функция $\vartheta(t) \xleftarrow{\div} \Theta(p)$ при $t > T$ обращалась тождественно в нуль.

Но по теореме свёртывания:

$$\frac{F(p)}{p^2 + k^2} \xrightarrow{\div} \begin{cases} \frac{1}{k} \int_0^t \psi(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau & \text{при } t < T \\ \frac{1}{k} \int_0^T \psi(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau & \text{„ } t > T \end{cases} \quad (3.50)$$

и, значит, при $t > T$:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= x_0 [\cos kt - \cos k(t - T)] + \\ &+ \frac{\dot{x}_0}{k} [\sin kt - \sin k(t - T)] + \frac{1}{mk} \int_0^T \psi(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \end{aligned}$$

Нужно обратить в этом выражении коэффициенты при $\cos kt$ и $\sin kt$ в нуль.

Это даёт систему двух уравнений:

$$\left. \begin{aligned} (1 - \cos kT) x_0 + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kT &= \\ &= \frac{1}{k} \int_0^T \psi(\tau) \sin k\tau d\tau = \frac{1}{k} s, \\ -x_0 \sin kT + (1 - \cos kT) \frac{\dot{x}_0}{k} &= \\ &= -\frac{1}{k} \int_0^T \psi(\tau) \cos(k\tau) d\tau = -\frac{1}{k} c. \end{aligned} \right\} \quad (3.51)$$

Предположим, что её определитель

$$\Delta = 4 \sin^2 \frac{kT}{2} \quad (3.52)$$

отличен от нуля, т. е. $k \neq \frac{2\pi n}{T}$ (n — целое число). При этом условии x_0 и $\dot{x}_0$ находятся из (51):

$$x_0 = \frac{1}{2km} \left(s + c \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} \right), \quad \dot{x}_0 = \frac{1}{2m} \left(s \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} - c \right). \quad (3.53)$$

Изображение вынужденных колебаний получим теперь, заменив в (49) постоянные x_0 и $\dot{x}_0$ этими значениями. Тогда:

$$\begin{aligned} X(p) = \frac{1}{2km} \left[\frac{p^2 \left(s + c \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} \right)}{p^2 + k^2} + \frac{pk \left(s \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} - c \right)}{p^2 + k^2} \right] + \\ + \frac{1}{mk} \frac{F(p)}{(1 - e^{-pT})(p^2 + k^2)} \end{aligned} \quad (3.54)$$

и при $t < T$ получаем искомое периодическое решение:

$$\begin{aligned} x(t) = \frac{1}{2km \sin \frac{kT}{2}} \left[s \sin k \left(t + \frac{T}{2} \right) + c \cos k \left(t + \frac{T}{2} \right) \right] + \\ + \frac{1}{km} \int_0^t \psi(\tau) \sin k(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (3.55)$$

Конечно, эта формула должна применяться для вычисления вынужденных колебаний только для $t < T$. При $t > T$ вынужденные колебания находятся с помощью периодического продолжения значений $x(t)$, определяемых по (55), в соответствующий интервал.

Чтобы выделить из изображения (49) изображение $X_1(p)$ свободных колебаний, нужно вычесть правую часть (54) из (49). Находим:

$$X_1(p) = \frac{x_0 p^2 + \dot{x}_0 p}{p^2 + k^2} - \frac{p}{2km(p^2 + k^2)} \left[p \left(s + c \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} \right) + \right. \\ \left. + k \left(s \operatorname{ctg} \frac{kT}{2} - c \right) \right] \rightarrow x_0 \cos kt + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin kt - \\ - \frac{1}{2mk \sin \frac{kT}{2}} \left[s \sin k \left(t + \frac{T}{2} \right) + c \cos k \left(t + \frac{T}{2} \right) \right], \quad (3.56)$$

причём это выражение пригодно при любом $t > 0$.

Определитель (52) может обратиться в нуль при $k = 0$; этот случай был рассмотрен выше в 1° этого параграфа: периодическое решение может существовать лишь при условии (11) и имеет вид (13). Остаётся рассмотреть случай $k = \frac{2\pi}{T} n$, где n — фиксированное целое число. Левые части уравнений (51) обращаются в нуль, и периодического решения, вообще говоря, нет. Оно может существовать лишь при условии обращения в нуль и правых частей уравнений (51). Это приводит к условиям:

$$s = \int_0^T \psi(\tau) \sin \frac{2\pi n \tau}{T} d\tau = 0, \quad c = \int_0^T \psi(\tau) \cos \frac{2\pi n \tau}{T} d\tau = 0, \quad (3.57)$$

выражающим, что в разложении периодической силы $\psi(t)$ в тригонометрический ряд должна отсутствовать гармоника с частотой $\frac{2\pi n}{T} = k$, т. е. та гармоника, которая действовала бы в резонансе со свободными колебаниями вибратора.

При соблюдении условий (59) постоянные x_0 и $\dot{x}_0$ остаются произвольными, и решение дифференциального уравнения

движения вибратора, взятое в форме (17), будет периодическим с периодом $T = \frac{2\pi n}{k}$:

$$x = x_0 \cos \frac{2\pi n t}{T} + \frac{\dot{x}_0}{k} \sin \frac{2\pi n t}{T} + \frac{1}{mk} \int_0^t \psi(\tau) \sin \frac{2\pi n}{T} (t - \tau) d\tau. \quad (3.58)$$

§ 17. Движение вибратора при наличии силы сопротивления

1°. Начнем с рассмотрения простейшей задачи о свободных колебаниях вибратора при наличии силы сопротивления, пропорциональной первой степени скорости. Дифференциальное уравнение движения имеет вид

$$m\ddot{x} + \beta\dot{x} + cx = 0. \quad (3.59)$$

При начальных условиях $x(0) = x_0$ и $\dot{x}(0) = \dot{x}_0$ изображающее уравнение будет:

$$X(p)(p^2 + 2np + k^2) = x_0 p^2 + (\dot{x}_0 + nx_0)p, \quad (3.60)$$

где $k^2 = \frac{c}{m}$, $2n = \frac{\beta}{m}$. Получаем:

$$X(p) = \frac{x_0 p(p+n) + (\dot{x}_0 + nx_0)p}{p^2 + 2np + k^2}. \quad (3.61)$$

Далее нужно различать три случая:

а) Случай малого сопротивления $k > n$. Обозначим $k_1^2 = k^2 - n^2$. По IV табл. 2 получаем затухающее колебательное движение:

$$X(p) \rightarrow x(t) = e^{-nt} \left[x_0 \cos k_1 t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} \sin k_1 t \right]. \quad (3.62)$$

б) Большое сопротивление: $k < n$. Обозначаем $n^2 - k^2 = n_1^2$. Находим решение, соответствующее аperiodическому движению:

$$X(p) \rightarrow x(t) = e^{-nt} \left[x_0 \operatorname{ch} n_1 t + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{n_1} \operatorname{sh} n_1 t \right]. \quad (3.63)$$

в) Случай $n = k$; получаем предельное аperiodическое движение:

$$X(p) = \frac{x_0 p}{p+n} + \frac{(\dot{x}_0 + nx_0)p}{(p+n)^2} \rightarrow x(t) = e^{-nt} [x_0 + (\dot{x}_0 + nx_0)t]. \quad (3.64)$$

2°. Далее рассмотрим случай наличия в правой части (53) возмущающей силы $f(t)$. Для сокращения письма полагаем $x_0 = \dot{x}_0 = 0$ и ограничимся написанием формул для случая $k > n$. Изображение решения получающегося дифференциального уравнения

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{1}{m} f(t) \quad (3.65)$$

будет:

$$X(p) = \frac{F(p)}{m(p^2 + 2np + k^2)} = \frac{1}{mk_1} \cdot \frac{1}{p} F(p) \frac{pk_1}{(p+n)^2 + k_1^2},$$

и по теореме свёртывания получим

$$x(t) = \frac{1}{mk_1} \int_0^t e^{-n(t-\tau)} \sin k_1(t-\tau) f(\tau) d\tau. \quad (3.66)$$

Рассмотрим частный случай синусоидальной силы

$$f(t) = f_0 \sin \omega t \rightarrow \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} f_0. \quad (3.67)$$

Конечно, вычисление можно проделать по формуле (66), но проще непосредственно определить $x(t)$ по его изображению:

$$X(p) = \frac{f_0 \omega}{m} \frac{p}{(p^2 + \omega^2)(p^2 + 2np + k^2)}.$$

Разложение на простейшие дроби предпочтительно, не прибегая к (1.78), искать в форме

$$\frac{X(p)}{p} = \frac{Ap + B}{p^2 + \omega^2} + \frac{Cp + D}{p^2 + 2np + k^2},$$

определяя A , B , C , D , например, методом неопределённых коэффициентов. Получаем:

$$X(p) = \frac{f_0}{m [(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]} \left[(k^2 - \omega^2) \frac{\omega p}{p^2 + k^2} - 2n\omega \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} + \right. \\ \left. + (2n^2 - k^2 + \omega^2) \frac{\omega p}{(p+n)^2 + k_1^2} + 2n\omega \frac{p(p+n)}{(p+n)^2 + k_1^2} \right] \rightarrow \\ \rightarrow \frac{f_0}{m [(k^2 - \omega^2)^2 + 4n^2\omega^2]} \left\{ (k^2 - \omega^2) \sin \omega t - 2n\omega \cos \omega t + \right. \\ \left. + e^{-nt} \left[(2n^2 - k^2 + \omega^2) \frac{\omega}{k_1} \sin k_1 t + 2n\omega \cos k_1 t \right] \right\} = x(t).$$

Вводя обозначения

$$\lambda = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{k^2}\right)^2 + 4\left(\frac{n\omega}{k^2}\right)^2}}, \\ \operatorname{tg} \gamma = -\frac{2\omega}{k^2 - \omega^2}, \quad \operatorname{tg} \delta = \frac{2nk_1}{2n^2 - k^2 + \omega^2}, \quad (3.68)$$

можем написать

$$x(t) = \frac{f_0 \lambda}{mk^2} \left[\sin(\omega t + \gamma) + \frac{\omega}{k_1} e^{-nt} \sin(k_1 t + \delta) \right]. \quad (3.69)$$

Второе слагаемое в скобках, представляющее свободные затухающие колебания, с возрастанием t быстро убывает, и при установившемся режиме получаем движение

$$x(t) = \frac{f_0 \lambda}{mk^2} \sin(\omega t + \gamma), \quad (3.70)$$

происходящее с частотой возмущающей силы — чисто вынужденные колебания вибратора.

Мы могли бы добавить к решению (69) слагаемые (62) и затем так выбрать x_0 и $\dot{x}_0$, чтобы обратить в нуль все слагаемые, имеющие частоту k_1 затухающих свободных колебаний. Иными словами, движение при установившемся режиме, даваемое формулой (70), представляет частное решение уравнения (65) при надлежащим образом подобранных начальных условиях. При t достаточно большом это движение фактически и реализуется.

3°. Возвращаясь к уравнению (65) и предполагая, что действующая на вибратор сила $f(t)$ может изменяться во времени по любому закону, но остаётся по модулю меньше некоторого значения $f_{\max}$, определим высшую границу смещения x , вычисляемого по (66). В более общем виде эта задача была рассмотрена в 2° § 8. Для решения её нужно в первую очередь найти корни функции $\psi_1(t)$, определяющей движение вибратора под действием единичного импульса; далее требуется нахождение закона движения вибратора $\psi_2(t)$ под действием единичной возмущающей силы $\sigma_0(t)$. Зная последний, определяем величину L по (2.45).

Очевидно, что $\psi_1(t)$ легко найти, полагая в (62) $x_0 = 0$, $\dot{x}_0 = 1$:

$$\psi_1(t) = \frac{1}{k_1} e^{-nt} \sin k_1 t,$$

и корни этой функции будут

$$t_s = \frac{s\pi}{k_1} \quad (s = 0, 1, 2, \dots).$$

Для определения $\psi_2(t)$ нужно найти решения уравнения

$$m\ddot{\psi}_2 + \beta\dot{\psi}_2 + c\psi_2 = \sigma_0(t)$$

при нулевых начальных условиях. Получаем по V табл. 2:

$$\begin{aligned} \Psi_2(p) &= \frac{1}{m} \frac{1}{p^2 + 2np + k^2} \xrightarrow{\cdot} \\ &\xrightarrow{\cdot} \frac{1}{mk^2} \left[1 - e^{-nt} (\cos k_1 t + \frac{n}{k_1} \sin k_1 t) \right] = \psi_2(t) \end{aligned}$$

и, следовательно:

$$\psi_2(t_s) = \frac{1}{mk^2} \left[1 - (-\eta)^s \right], \quad \eta = e^{-\frac{\pi n}{k_1}}.$$

Теперь по (2.45) получаем:

$$L = \frac{1}{mk^2} (1 + \eta) (1 + \eta + \eta^2 + \dots) = \frac{1}{mk^2} \frac{1 + \eta}{1 - \eta} = \frac{1}{c} \operatorname{cth} \frac{\pi n}{2k_1}$$

и по (2.46) находим искомую оценку:

$$|x(t)| < \frac{f_{\max}}{c} \operatorname{cth} \frac{\pi n}{2k_1} \quad \text{или} \quad \frac{|x(t)|}{x_{st}} < \operatorname{cth} \frac{\pi n}{2k_1}, \quad (3.71)$$

где x_{st} обозначает отклонение вибратора от положения равновесия под действием статически прикладываемой постоянной силы, равной по величине максимуму модуля возмущающей силы. Такая оценка имеет место в случае „малого сопротивления“ ($n < k$); при $n > k$ по (2.47) имеем:

$$\frac{|x(t)|}{x_{st}} < 1. \quad (3.72)$$

В случае очень малого сопротивления ($n \ll k$) можно приближенно принять

$$\eta = 1 - \frac{\pi n}{k}, \quad \frac{|x(t)|}{x_{st}} < \frac{2}{\pi} \frac{k}{n} = 0,64 \frac{k}{n},$$

тогда как под действием синусоидальной возмущающей силы в случае очень малого сопротивления имеем $x_{\max} = 0,5 \frac{k}{n} x_{st}$.

4°. Рассмотрим движение вибратора при действии на него, кроме силы сопротивления, пропорциональной скорости, ещё силы сухого трения, постоянной по величине и имеющей направление, противоположное скорости. Уравнение движения (полагая массу равной единице) имеет вид:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = -f \operatorname{sgn} \dot{x}, \quad (3.73)$$

где f — постоянная сила трения при движении, а через $\operatorname{sgn} \dot{x}$ обозначен знак скоростей, т. е. $\operatorname{sgn} \dot{x} = 1$ при $\dot{x} > 0$ и $\operatorname{sgn} \dot{x} = -1$ при $\dot{x} < 0$. Силу трения покоя (при $\dot{x} = 0$) назовем f_0 ; известно, что $f_0 > f$.

За начало отсчета времени примем один из моментов, когда скорость обращается в нуль; в этот момент $x = x_0$ и можно, надлежащим образом направляя ось x , считать $x_0 > 0$; итак, начальные условия будут:

$$\text{при } t = 0 \quad x = x_0 > 0, \quad \dot{x} = 0 \quad (3.74)$$

и движение начнётся, если восстанавливающая сила, направленная по отрицательной оси x и равная k^2x_0 , больше, чем сила трения покоя: $k^2x_0 > f_0$.

Скорость в этом движении до момента остановки будет направлена по отрицательной оси x , т. е. $\operatorname{sgn} \dot{x} = -1$. Итак, на этом этапе уравнение движения будет:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = f. \quad (3.75)$$

В некоторый момент времени t_1 , заранее не известный, скорость снова обратится в нуль; пусть $x(t_1) = x_1$ и предположим, что

$$k^2|x_1| > f_0. \quad (3.76)$$

Ниже будет показано, что при этом условии $x_1 < 0$. Дальнейшее движение от момента t_1 будет происходить по положительному направлению оси x , т. е. при $\operatorname{sgn} \dot{x} = 1$. Уравнение движения теперь надо писать в виде

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = -f \quad (3.77)$$

и решать его при начальных условиях

$$\text{при } t = t_1 \quad x = x_1 < 0, \quad \dot{x} = 0. \quad (3.78)$$

Это рассуждение можно продолжить дальше; пусть скорость обращается в нуль в моменты $0, t_1, t_2, \dots$, а соответствующие отклонения будут $x_0, x_1, x_2, \dots$. Они убывают по абсолютной величине, так как в системе имеется рассеяние энергии. Поэтому при некотором i окажется $k^2|x_i| < f_0$, и движение прекратится.

Уравнение движения вибратора на основании сказанного можно записать в форме:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = f [\sigma_0(t) - 2\sigma_0(t - t_1) + \\ + 2\sigma_0(t - t_2) - \dots] \quad (3.79)$$

и решать его при начальных условиях (74). Значения $t_1, t_2, \dots$, конечно, заранее не известны — их будем определять в процессе решения задачи.

Изображающее уравнение имеет вид:

$$X(p) (p^2 + 2np + k^2) = x_0(2np + p^2) + \\ + f(1 - 2e^{-pt_1} + 2e^{-pt_2} - \dots). \quad (3.80)$$

Найдём далее изображение производной:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) & \leftarrow \frac{1}{p} pX(p) - px_0 = x_0 p \left(\frac{p^2 + 2np}{p^2 + 2np + k^2} - 1 \right) + \\ & + \frac{fp}{p^2 + 2np + k^2} (1 - 2e^{-pt_1} + 2e^{-pt_2} - \dots) = \\ & = [f(1 - 2e^{-pt_1} + 2e^{-pt_2} - \dots) - x_0 k^2] \frac{p}{(p+n)^2 + k_1^2}.\end{aligned}$$

Соответствующая начальная функция будет:

$$\begin{aligned}\dot{x}(t) & = -\frac{1}{k_1} (x_0 k^2 - f) e^{-nt} \sin k_1 t \quad 0 \leq t \leq t_1 \\ \dot{x}(t) & = -\frac{1}{k_1} (x_0 k^2 - f) e^{-nt} \sin k_1 t - \\ & - \frac{2f}{k_1} e^{-n(t-t_1)} \sin k_1 (t-t_1) \quad t_1 \leq t \leq t_2\end{aligned}$$

и т. д.

Из первой строки находим $k_1 t_1 = \pi$; подстановка во вторую строку даёт $k_1 t_2 = 2\pi$ и т. д. Вообще получаем, что моменты обращения скорости в нуль выражаются формулой

$$t_s = s t_0, \quad t_0 = \frac{\pi}{k_1}. \quad (3.81)$$

Подстановка в (80) даёт теперь:

$$\begin{aligned}X(p) & = x_0 \frac{p^2 + 2np}{p^2 + 2np + k^2} + \\ & + f(1 - 2e^{-pt_0} + 2e^{-2pt_0} - \dots) \frac{1}{p^2 + 2np + k^2} = \\ & = \left[x_0 - \frac{f}{k^2} (1 - 2e^{-pt_0} + 2e^{-2pt_0} - \dots) \right] \frac{p(p+n) + pn}{(p+n)^2 + k_1^2} + \\ & + \frac{f}{k^2} (1 - 2e^{-pt_0} + 2e^{-2pt_0} - \dots).\end{aligned}$$

Соответствующую начальную функцию можно получить на основании теоремы запаздывания по отдельным этапам

движения $(0, t_1), (t_1, t_2), \dots$. Для этапа (t_s, t_{s+1}) , т. е. $st_0 \leq t \leq (s+1)t_0$, найдём

$$\begin{aligned} x(t) = & e^{-nt} \left(\cos k_1 t + \frac{n}{k_1} \sin k_1 t \right) \times \\ & \times \left[x_0 - \frac{f}{k^2} (1 + 2e^{nt_0} + 2e^{2nt_0} + \dots + 2e^{st_0 n}) \right] + (-1)^s \frac{f}{k^2} = \\ = & \left(x_0 - \frac{f_0}{k^2} \frac{2e^{(s+1)nt_0} - e^{nt_0} - 1}{e^{nt_0} - 1} \right) e^{-nt} \left(\cos k_1 t + \frac{n}{k_1} \sin k_1 t \right) + \\ & + (-1)^s \frac{f}{k^2}. \quad (3.82) \end{aligned}$$

Соответствующие отклонения в конце первого, второго и т. д. этапов будут:

$$\begin{aligned} x_1 = & - \left(x_0 - \frac{f}{k^2} \right) e^{-nt_0} + \frac{f}{k^2}, \\ x_2 = & \left[x_0 - \frac{f}{k^2} (1 + 2e^{nt_0}) \right] e^{-2nt_0} - \frac{f}{k^2} \quad \text{и т. д.} \quad (3.83) \end{aligned}$$

Как указано выше, движение на втором этапе будет происходить при условии (76); нужно ещё убедиться, что x_1 будет отрицательным; для этого предположим обратное, что $x_1 > 0$, т. е. $|x_1| = x_1$; тогда по (76) получим:

$$k^2 |x_1| = -k^2 x_0 e^{-nt_0} + f(1 + e^{-nt_0}) > f_0,$$

и это неравенство усиливается, если заменить f_0 меньшей величиной f ; тогда $-k^2 x_0 + f > 0$, т. е. $f > k^2 x_0$, что противоречит условию, наложенному на x_0 . Итак, $x_1 < 0$ и условие (76) приводит к неравенству, которому должно удовлетворять x_0 , чтобы движение продолжалось на втором этапе:

$$k^2 x_0 > f(e^{nt_0} + 1) + f_0 e^{nt_0}.$$

Аналогично рассматриваются следующие этапы движения.

5°. Рассмотрим теперь случай действия на вибратор периодически прикладываемых через промежуток времени T импульсов S , направленных в одну и ту же сторону. Уравнение движения вибратора имеет вид:

$$\begin{aligned} \ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2 x = & \frac{S}{m} [\sigma_1(t) + \sigma_1(t-T) + \\ & + \sigma_1(t-2T) + \dots]. \quad (3.84) \end{aligned}$$

Оно было уже рассмотрено (§ 3, 4°) при отсутствии сопротивления ($n=0$). Изображающее уравнение будет:

$$X(p)(p^2 + 2np + k^2) = x_0 p(p + n) + (\dot{x}_0 + nx_0)p + \frac{S}{m} \cdot \frac{p}{1 - e^{-pT}}. \quad (3.85)$$

Из него находим:

$$X(p) = \frac{\Theta(p)}{1 - e^{-pT}},$$

$$\Theta(p) = \frac{x_0 p(p + n) + (\dot{x}_0 + nx_0)p}{p^2 + 2np + k^2} (1 - e^{-pT}) + \frac{S}{m} \cdot \frac{p}{p^2 + 2np + k^2}. \quad (3.86)$$

Желая выделить из решения его периодическую часть (имеющую период импульсов T), мы должны так подобрать начальные данные x_0 и $\dot{x}_0$, чтобы начальная функция $\vartheta(t) \leftarrow \Theta(p)$ тождественно обращалась в нуль при $t > T$, но при этих значениях t имеем:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) = & x_0 e^{-nt} [\cos k_1 t - u \cos k_1 (t - T)] + \\ & + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} e^{-nt} [\sin k_1 t - u \sin k_1 (t - T)] + \\ & + \frac{S}{mk_1} e^{-nt} \sin k_1 t \quad (u = e^{nT}). \end{aligned}$$

Приравнявая нулю коэффициенты при $\cos k_1 t$, $\sin k_1 t$, получаем:

$$\left. \begin{aligned} x_0 (1 - u \cos k_1 T) + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} u \sin k_1 T &= 0, \\ -x_0 u \sin k_1 T + \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} (1 - u \cos k_1 T) &= -\frac{S}{mk_1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.87)$$

Определитель этой системы

$$\Delta = 1 - 2u \cos k_1 T + u^2 \quad (3.88)$$

не обращается в нуль при $n \neq 0$. Тогда:

$$x_0 = \frac{S}{mk_1} \frac{u \sin k_1 T}{\Delta}, \quad \frac{\dot{x}_0 + nx_0}{k_1} = -\frac{S}{mk_1} \frac{1 - u \cos k_1 T}{\Delta}. \quad (3.89)$$

Подставляя эти выражения в (86), находим изображение вынужденных колебаний вибратора:

$$X(p) = \frac{S}{mk_1\Delta} \left[\frac{p(p+n)}{p^2+2np+k^2} u \sin k_1 T - \frac{pk_1}{p^2+2np+k^2} \times \right. \\ \left. \times (1 - u \cos k_1 T) + \frac{\Delta}{1 - e^{-pT}} \frac{pk_1}{p^2+2np+k^2} \right] \quad (3.90)$$

и при $t < T$ получаем:

$$x(t) = \frac{Se^{-n(t-T)}}{mk_1\Delta} [\sin k_1 T \cos k_1 t + (u - \cos k_1 T) \sin k_1 t]. \quad (3.91)$$

Полученное движение, подчеркиваем еще раз, будет периодическим, а отнюдь не затухающим, как это может показаться по внешнему виду формулы (91): последняя по способу её получения пригодна для вычисления $x(t)$ только для промежутка времени $(0, T)$; для любого другого момента времени находим вынужденные колебания, периодически продолжая функцию, определяемую выражением (91), в соответствующий интервал времени.

Чтобы выделить из изображения общего решения изображение свободных колебаний $X_1(p)$, нужно, как это многократно пояснялось, вычесть правую часть (90), т. е. изображение вынужденных колебаний, из выражения $X(p)$, даваемого формулой (86). Полагая теперь для простоты $x_0 = \dot{x}_0 = 0$, получаем:

$$X_1(p) = - \frac{S}{mk_1\Delta} \left[\frac{p(p+n)}{p^2+2np+k^2} u \sin k_1 T - \right. \\ \left. - \frac{pk_1}{p^2+2np+k^2} (1 - u \cos k_1 T) \right] \div \frac{S}{mk_1\Delta} e^{-nt} \times \\ \times [(1 - u \cos k_1 T) \sin k_1 t - u \sin k_1 T \cos k_1 t] = x_1(t),$$

причём это выражение $x_1(t)$ пригодно для всех $t > 0$ (а не только, скажем, для промежутка $0 \leq t \leq T$). Поэтому свободные колебания являются затухающими, и по истечении достаточно большого промежутка времени вибратор будет совершать чисто периодическое движение с периодом T прикладываемых импульсов, вычисляемое по (91). Выделение периодического решения в данном случае имеет совершенно отчетливое физическое значение: таким образом находится

режим движения, фактически реализуемый при достаточно большом t (установившийся процесс).

Обратимся к исследованию движения при установившемся режиме. Для упрощения письма введём безразмерные величины:

$$\delta = \frac{1}{2} n T_0, \quad \frac{T}{T_0} = z, \quad \frac{t}{T_0} = \tau, \quad \text{где } T_0 = \frac{2\pi}{k_1}.$$

Здесь δ — логарифмический декремент затухающих свободных колебаний вибратора, T_0 — период этих колебаний, z — отношение периода импульсов к периоду свободных колебаний, τ — безразмерное время (вычисляемое в долях T_0). Выражение (91) приводится к виду:

$$x(\tau) = \frac{ST_0}{2\pi m} \frac{e^{2\delta z - 2\delta\tau}}{1 - 2e^{2\delta z} \cos 2\pi z + e^{4\delta z}} \times \\ \times [\sin 2\pi z \cos 2\pi\tau + (e^{2\delta z} - \cos 2\pi z) \sin 2\pi\tau],$$

что можно записать также в более удобной форме

$$x(\tau) = \frac{ST_0}{2\pi m} \frac{e^{\delta z - 2\delta\tau}}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} 2\delta z - \cos 2\pi z)} \sin(2\pi\tau + \alpha), \quad (3.92)$$

где $0 < \tau < z$ и α определяется условиями:

$$\left. \begin{aligned} \sin \alpha &= \frac{e^{-\delta z} \sin 2\pi z}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} 2\delta z - \cos 2\pi z)}, \\ \cos \alpha &= \frac{e^{\delta z} - e^{-\delta z} \cos 2\pi z}{\sqrt{2}(\operatorname{ch} 2\delta z - \cos 2\pi z)}, \end{aligned} \right\} \quad (3.93)$$

из которых следует, что $-\frac{\pi}{2} < \alpha < \frac{\pi}{2}$ (так как $\cos \alpha > 0$).

Экстремумам $x(\tau)$ соответствуют значения $\tau = \tau_m$, обращающие в нуль $\frac{dx}{d\tau}$. Получаем:

$$\operatorname{ctg}(2\pi\tau_m + \alpha) = \frac{\delta}{\pi}, \quad 2\pi\tau_m + \alpha = \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\pi} + s\pi,$$

где $\operatorname{arctg} \frac{\delta}{\pi} < \frac{\pi}{2}$ и s — целые числа, выбираемые так, чтобы τ_m заключалось в интервале $(0, z)$.

Замечая далее, что

$$\sin(2\pi\tau_m + \alpha) = \frac{(-1)^s}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\pi^2}}},$$

находим экстремальные амплитудные значения $x(\tau)$:

$$x(\tau_m) = (-1)^s \frac{ST_0}{2\pi m} \psi(\delta) \frac{e^{\delta(z + \frac{\alpha}{\pi} - s)}}{\sqrt{2(\operatorname{ch} 2\delta z - \cos 2\pi z)}}, \quad (3.94)$$

где для краткости обозначено:

$$\psi(\delta) = \frac{e^{-\frac{\delta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\pi}}}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\pi^2}}}.$$

Определим, как будет изменяться $x(\tau_m)$ в зависимости от параметра z . Вычисляем для этого производную $\frac{dx(\tau_m)}{dz}$; замечая, что

$$\operatorname{tg} \alpha = \frac{\sin 2\pi z}{e^{2\delta z} - \cos 2\pi z}, \quad \frac{1}{\cos^2 \alpha} \frac{d\alpha}{dz} = \frac{d}{dz} \left(\frac{\sin 2\pi z}{e^{2\delta z} - \cos 2\pi z} \right),$$

после несложных выкладок получим:

$$\frac{d}{dz} \left(z + \frac{\alpha}{\pi} \right) = \frac{\operatorname{sh} 2\delta z - \frac{\delta}{\pi} \sin 2\pi z}{\operatorname{ch} 2\delta z - \cos 2\pi z}.$$

Дальнейшее вычисление уже не представляет затруднений. Находим

$$\begin{aligned} \frac{dx(\tau_m)}{dz} = & (-1)^{s+1} \frac{ST_0}{2\sqrt{2m}} \left(1 + \frac{\delta^2}{\pi^2} \right) \psi(\delta) e^{\delta(z + \frac{\alpha}{\pi} - s)} \times \\ & \times \frac{\sin 2\pi z}{(\operatorname{ch} 2\delta z - \cos 2\pi z)^{3/2}}. \end{aligned}$$

Поэтому экстремумы амплитудных значений $x(\tau)$ достигаются при $z = \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}$ и т. д. Параметр α при этих значениях z по (93) будет равным нулю и из (92) следует, что $x(\tau)$ при $z = \frac{k}{2}$ (где k — целое число) меняет знак ($k-1$)

раз за один период и имеет k экстремумов при значениях τ_m :

$$\tau_m^{(0)} = \text{arctg} \frac{\delta}{\pi}, \quad \tau_m^{(1)} = \tau_m^{(0)} + \frac{1}{2}, \quad \dots, \quad \tau_m^{(k-1)} = \tau_m^{(0)} + \frac{1}{2}(k-1),$$

соответствующих $s = 0, 1, 2, 3, \dots, k-1$. Выражения $x(\tau)$ и $x(\tau_m^{(s)})$ при этом будут:

при нечётном $k = 2n + 1$ ($n = 0, 1, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} x(\tau) &= \frac{ST_0}{2\pi m} \frac{1}{1 + e^{-(2n+1)\delta}} e^{-2\delta\tau} \sin 2\pi\tau \quad \left(0 < \tau < \frac{2n+1}{2}\right); \\ x(\tau_m^{(s)}) &= (-1)^s \frac{ST_0}{2\pi m} \frac{\psi(\delta) e^{-s\delta}}{1 + e^{-(2n+1)\delta}} \quad (s = 0, 1, \dots, 2n); \end{aligned} \right\} \quad (3.95)$$

при чётном $k = 2n$ ($n = 1, 2, \dots$):

$$\left. \begin{aligned} x(\tau) &= \frac{ST_0}{2\pi m} \frac{1}{1 - e^{-2n\delta}} e^{-2\delta\tau} \sin 2\pi\tau \quad (0 < \tau < n); \\ x(\tau_m^{(s)}) &= (-1)^s \frac{ST_0}{2\pi m} \frac{\psi(\delta) e^{-s\delta}}{1 - e^{-2n\delta}} \quad (s = 0, 1, \dots, 2n-1). \end{aligned} \right\} \quad (3.96)$$

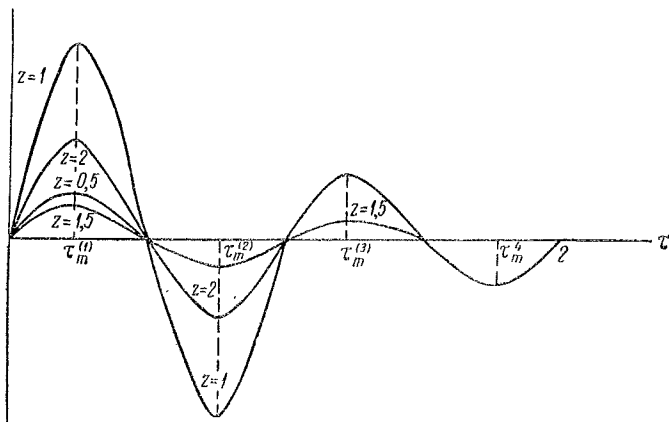


Рис. 23. Установившееся движение вибратора под действием периодически прикладываемых импульсов для различных

$$z = \frac{T}{T_0}.$$

Из этих формул легко заключить, что наибольшее отклонение вибратор получает при $z = 1$, что соответствует

первому резонансу ($T = T_0$); это отклонение получается из (3.96) при $s = 0$:

$$x_{\max} = \frac{ST_0}{m} f_1(\delta), \quad f_1(\delta) = \frac{\psi(\delta)}{2\pi(1 - e^{-2\delta})}. \quad (3.97)$$

При $s = 1$ получается второе экстремальное значение (минимальное):

$$x_{\min} = -\frac{ST_0}{m} f_2(\delta), \quad f_2(\delta) = e^{-\delta} f_1(\delta), \quad (3.98)$$

которое по абсолютному значению меньше, чем $x_{\max}$.

В приводимой ниже таблице даны значения функций $\psi(\delta)$, $f_1(\delta)$, $f_2(\delta)$, а на рис. 23 показан примерный вид графиков движения при резонансах первого ($z = 1$) и второго ($z = 2$) порядка, а также для значений z , равных $\frac{1}{2}$ и $\frac{3}{2}$.

Каждый график построен на протяжении соответствующего периода (для $0 \leq \tau \leq z$).

Установившиеся колебания выбратора под действием периодических импульсов. Функции $\psi(\delta)$, $f_1(\delta)$, $f_2(\delta)$, $f_3(\delta)$

δ	$\psi(\delta)$	$f_1(\delta)$	$f_2(\delta)$	$f_3(\delta)$	δ	$\psi(\delta)$	$f_1(\delta)$	$f_2(\delta)$	$f_3(\delta)$
0,1	0,952	0,836	0,756	3,185	0,6	0,754	0,172	0,094	0,532
0,2	0,907	0,438	0,358	1,592	0,7	0,722	0,153	0,076	0,457
0,3	0,865	0,305	0,226	1,062	0,8	0,692	0,138	0,062	0,400
0,4	0,825	0,239	0,160	0,797	0,9	0,664	0,127	0,051	0,356
0,5	0,788	0,199	0,120	0,638	1,0	0,638	0,117	0,043	0,321

6° Рассмотрим теперь случай, когда к вибратору через промежуток времени T прикладываются

¹ В первом издании этой книги был рассмотрен случай совпадения периода импульса T с периодом T'_0 свободных колебаний при отсутствии сопротивления ($kT'_0 = 2\pi$) и получены формулы для $x_{\max}$ и $x_{\min}$. Они имеют более сложный вид, чем (97) и (98), и, к сожалению, содержат арифметическую ошибку (в знаменателе должно вместо 4 стоять 2). Поэтому числа таблицы на стр. 77 указанного издания нужно увеличить в два раза.

импульсы одинаковой величины, но направленные противоположно. Установившееся движение вибратора будет иметь период $2T$ и менять своё направление через каждый полупериод. Для разыскания его применим тот же метод, что и выше. Изображение $X(p) \leftrightarrow x(t)$ в данном случае будет:

$$X(p) = \frac{\Theta(p)}{1 + e^{-pT}},$$

$$\Theta(p) = \frac{x_0 p (p + n) + (\dot{x}_0 + n x_0) p}{p^2 + 2np + k^2} (1 + e^{-pT}) + \frac{S}{m} \frac{p}{p^2 + 2np + k^2} \quad (3.99)$$

и при $t > T$ имеем:

$$\Theta(p) \leftrightarrow \vartheta(t) = e^{-nt} \left\{ x_0 [\cos k_1 t + u \cos k_1 (t - T)] + \right. \\ \left. + \frac{x_0 + n \dot{x}_0}{k_1} [\sin k_1 t + u \sin k_1 (t - T)] + \frac{S}{mk_1} \sin k_1 t \right\}, \quad (3.100)$$

где, как и выше, $e^{nT} = u$. Определяя x_0 и $\dot{x}_0$ из условия тождественного обращения в нуль этого выражения, найдём:

$$\left. \begin{aligned} x_0 &= -\frac{S}{mk_1} \frac{u \sin k_1 T}{\Delta}, \quad \frac{n x_0 + \dot{x}_0}{k_1} = -\frac{S}{mk_1} \frac{1 + u \cos k_1 T}{\Delta} \\ \Delta &= 1 + 2u \cos k_1 T + u^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.101)$$

Изображение искомого периодического решения получим, подставляя эти значения в (99):

$$X(p) = -\frac{S}{mk_1 \Delta} \cdot \frac{1}{p^2 + 2np + k^2} \left[u \sin k_1 T p (p + n) + \right. \\ \left. + (1 + u \cos k_1 T) k_1 p - \frac{\Delta}{1 + e^{-pT}} p k_1 \right],$$

откуда

$$x(t) = \frac{S e^{n(T-t)}}{mk_1 (1 + 2u \cos k_1 T + u^2)} [u \sin k_1 t - \sin k_1 (T - t)], \quad (3.102)$$

при $0 \leq t \leq T$; значения $x(t)$ для $T \leq t < 2T$ получаются нечётным продолжением (102) в этот промежуток; зная же $x(t)$ для первого периода $(0, 2T)$, находим его значения для любого t по свойству периодичности.

Выражение для свободных колебаний $x_1(t)$ вибратора при нулевых начальных условиях находится с помощью неоднократно применявшегося выше приёма; получаем при всех $t > 0$:

$$x_1(t) = \frac{Se^{-nt}}{mk_1\Delta} [\sin k_1 t + u \sin k_1(t - T)]. \quad (3.103)$$

Эти колебания, конечно, затухают.

Предположим теперь, что импульсы сообщаются при прохождении вибратором среднего положения ($x = 0$). Но, по условию, моменты сообщения импульсов (считая, что установившийся режим движения уже имеет место) равны $0, T, 2T, \dots$ Итак,

$$x(0) = -x(T) = x(2T) = \dots = 0.$$

Приравнивая нулю приведённое выше значение x_0 , получаем соотношение, определяющее T :

$$k_1 T = \pi, \quad T = \frac{\pi}{k_1},$$

т. е. импульсы должны сообщаться через полупериод свободных колебаний вибратора. Подстановка в (102) даёт теперь:

$$x(t) = \frac{TS}{m\pi} \cdot \frac{e^{-nt}}{1 - e^{-nT}} \sin \frac{\pi t}{T}. \quad (3.104)$$

Таково будет одно из решений, именно периодическое решение, отвечающее начальным условиям (101), дифференциального уравнения движения вибратора при действии импульсов постоянной величины и противоположного направления, сообщаемых вибратору при прохождении им среднего положения ($x = 0$). Как уже указывалось выше, именно это движение и реализуется в установившемся режиме, так как возникающие с самого начала процесса свободные колебания затухают.

Следует отметить, что внешнюю силу (импульсы) мы можем считать функцией не времени, а положения, так как импульсы сообщаются каждый раз в определённом месте

(при прохождении равновесного состояния).¹ Поэтому дифференциальное уравнение движения вибратора можно записать в форме

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{S}{m} \sigma_1(x) \operatorname{sgn} \dot{x},$$

и в предшествующем изложении дан приём, позволяющий в некоторых частных задачах обходить трудности, возникающие при разыскании периодических решений подобных уравнений. Эти периодические движения называются автоколебаниями; колебания этого рода, несмотря на наличие силы сопротивления, не затухают, а поддерживаются за счет сил, зависящих от состояния движения самой системы; амплитуды автоколебаний определяются свойствами системы, а не начальными условиями.

Для определения амплитуды заметим, что $\dot{x}(t)$ обращается в нуль при

$$t = t_m = \frac{T}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{nT}{\pi},$$

откуда следует, что $t_m < \frac{T}{2}$.

Подстановка в (104) даёт:

$$x_{\max} = \frac{TS}{m\pi} \frac{1}{1 - e^{-\delta}} \frac{e^{-\frac{\delta}{\pi} \operatorname{arctg} \frac{\delta}{\pi}}}{\sqrt{1 + \frac{\delta^2}{\pi^2}}} = \frac{TS}{m} f_{\text{в}}(\delta), \quad (3.105)$$

где $\delta = nT$ — логарифмический декремент затухания (напомним, что через T теперь обозначен полупериод свободных колебаний).

Значения $f_{\text{в}}(\delta)$ приведены в таблице на стр. 191.

7°. Рассмотрим вибратор, на который действует сила, имеющая постоянную величину f_0 , при движении вибратора со скоростью, направленной

¹ Рассматриваемое движение можно осуществить, снабжая маятник спусковым механизмом, при действии которого маятнику при прохождении им равновесного положения сообщаются импульсы определённой величины, направленные в сторону движения (схема часов).

в положительную сторону оси x ; сила обращается в нуль, когда вибратор движется в противоположную сторону.

Пусть $t = 0$, $t = t_2$, $t = t_4$, ... — моменты времени, когда $\dot{x}$ становится равным нулю, переходя от отрицательных значений к положительным, а $t = t_1$, $t = t_3$, ... — моменты, когда, обращаясь в нуль, $\dot{x}$ переходит от положительных значений к отрицательным. Тогда

$$f(t) = f_0 [\sigma_0(t) - \sigma_0(t - t_1) + \sigma_0(t - t_2) - \dots], \quad (3.106)$$

и уравнение движения вибратора (считая его массу, равной единице) будет:

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = f_0 [\sigma_0(t) - \sigma_0(t - t_1) + \sigma_0(t - t_2) - \dots], \quad (3.107)$$

где t_1 , t_2 , ... заранее не известны. Это же уравнение можно было бы записать в виде:¹

$$\ddot{x} + 2n\dot{x} + k^2x = \frac{1}{2} f_0 (1 + \operatorname{sgn} \dot{x}), \quad (3.108)$$

но для применения операционного метода решения следует взять форму записи (107), в которой правая часть представлена как функция времени.

Рассматриваемая система неконсервативна, имеются как диссипативная сила (слагаемое $2n\dot{x}$ в уравнении движения), так и сила, поддерживающая движение и возникающая вследствие этого движения. Это даёт основания предположить возможность существования автоколебательного режима, в котором расход энергии будет равен её притоку.

Итак, предположим, что (107) имеет периодическое решение с периодом T ; тогда скорость $\dot{x}$ будет обращаться в нуль через одинаковые промежутки времени. Пусть t_0 — момент времени ($t_0 < T$), когда $\dot{x}$ переходит от положительных

¹ К этому уравнению сводится задача о колебаниях в ламповом генераторе в случае Γ -характеристик. См. А. А. Андронов и С. Э. Хайкин, Теория колебаний. ОНТИ, 1937, стр. 164—177.

значений к отрицательным; в (106) имеем $t_1 = t_0$, $t_2 = T$, $t_3 = t_0 + T$ и т. д. Получаем:

$$f(t) \leftarrow f_0 \frac{1 - e^{-pt_0}}{1 - e^{-pT}}. \quad (3.109)$$

Изображающее уравнение имеет вид:

$$(p^2 + 2np + k^2) X(p) = x_0(p^2 + 2np) + f_0 \frac{1 - e^{-pt_0}}{1 - e^{-pT}}. \quad (3.110)$$

Слагаемое, содержащее $\dot{x}_0$, отсутствует, так как при $t = 0$ скорость по условию обращается в нуль. Получаем:

$$\left. \begin{aligned} X(p) &= \frac{\Theta(p)}{1 - e^{-pT}}, \\ \Theta(p) &= x_0 \frac{p^2 + 2np}{p^2 + 2np + k^2} (1 - e^{-pT}) + f_0 \frac{1 - e^{-pt_0}}{p^2 + 2np + k^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.111)$$

Для построения периодического решения $\vartheta(t) \leftarrow \Theta(p)$ должно обращаться в нуль тождественно при $t > T$:

$$\begin{aligned} \vartheta(t) &= x_0 e^{-nt} \left[\{ \cos k_1 t - u \cos k_1 (t - T) \} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{k_1} \{ \sin k_1 t - u \sin k_1 (t - T) \} \right] - \\ &\quad - \frac{f_0}{k^2} e^{-nt} \left[\{ \cos k_1 t - u_0 \cos k_1 (t - t_0) \} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{n}{k_1} \{ \sin k_1 t - u_0 \sin k_1 (t - t_0) \} \right], \end{aligned} \quad (3.112)$$

где обозначено $u = e^{nT}$, $u_0 = e^{nt_0}$. Приравнявая нулю коэффициенты при $\cos k_1 t$ и $\sin k_1 t$, получаем два уравнения, связывающие три неизвестных x_0 , t_0 , T :

$$\begin{aligned} x_0 &= \frac{f_0}{k^2} \frac{1 - u_0 \left(\cos k_1 t_0 - \frac{n}{k_1} \sin k_1 t_0 \right)}{1 - u \left(\cos k_1 T - \frac{n}{k_1} \sin k_1 T \right)} = \\ &= \frac{f_0}{k^2} \frac{1 - u_0 \left(\cos k_1 t_0 + \frac{k_1}{n} \sin k_1 t_0 \right)}{1 - u \left(\cos k_1 T + \frac{k_1}{n} \sin k_1 T \right)}. \end{aligned} \quad (3.113)$$

Отсюда после некоторых преобразований получаем соотношение, связывающее t_0 и T :

$$\frac{u_0 \sin k_1 t_0}{1 - u_0 \cos k_1 t_0} = \frac{u \sin k_1 T}{1 - u \cos k_1 T}. \quad (3.114)$$

Из (113) теперь находим:

$$x_0 = \frac{f_0}{k^2} \frac{u_0 \sin k_1 t_0}{u \sin k_1 T}. \quad (3.115)$$

Подстановка в (111) даёт изображение $X(p)$:

$$X(p) = \frac{f_0}{k^2} \left[\frac{1 - e^{-pt_0}}{1 - e^{-pT}} + \right. \\ \left. + \frac{p^2 + 2np}{p^2 + 2np + k^2} \left(\frac{u_0 \sin k_1 t_0}{u \sin k_1 T} - \frac{1 - e^{-pt_0}}{1 - e^{-pT}} \right) \right], \quad (3.116)$$

откуда находим при $t \leq t_0$:

$$x(t) = \\ = \frac{f_0}{k^2} \left[1 + e^{-nt} \left(\frac{u_0 \sin k_1 t_0}{u \sin k_1 T} - 1 \right) \left(\cos k_1 t + \frac{n}{k_1} \sin k_1 t \right) \right], \quad (3.117)$$

$$\dot{x}(t) = \frac{f_0}{k_1} \left(1 - \frac{u_0}{u} \frac{\sin k_1 t_0}{\sin k_1 T} \right) e^{-nt} \sin k_1 t, \quad (3.118)$$

и t_0 определяется из условия, что $\dot{x}(t_0) = 0$. Получаем:

$$k_1 t_0 = \pi. \quad (3.119)$$

Из (114) теперь следует

$$k_1 T = 2\pi, \quad (3.120)$$

т. е. период автоколебаний равен периоду затухающих колебаний вибратора. Далее, из (115) и (114) находим:

$$x_0 = - \frac{f_0}{k^2} \frac{1}{e^{\delta} - 1}, \quad (3.121)$$

где $\delta = \frac{1}{2} nT$ — логарифмический декремент затухающих колебаний. Возвращаясь к выражению (116) для $X(p)$, получаем:

$$X(p) = \frac{f_0}{k^2} \left[\frac{1}{1 + e^{-\frac{pT}{2}}} - \frac{p^2 + 2np}{p^2 + 2np + k^2} \left(\frac{1}{e^\delta - 1} + \frac{1}{1 + e^{-\frac{pT}{2}}} \right) \right] \quad (3.122)$$

и начальная функция будет:

$$x(t) = \begin{cases} \frac{f_0}{k^2} \left[1 - \frac{e^\delta}{e^\delta - 1} e^{-nt} \left(\cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{\delta}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right) \right] & 0 \leq t \leq \frac{T}{2} \\ -\frac{f_0}{k^2} \frac{e^{2\delta}}{e^\delta - 1} e^{-nt} \left(\cos \frac{2\pi t}{T} + \frac{\delta}{\pi} \sin \frac{2\pi t}{T} \right) & \frac{T}{2} \leq t \leq T. \end{cases} \quad (3.123)$$

Эти формулы определяют режим автоколебаний. Максимальное отклонение вибратор получает в момент $t = \frac{T}{2}$:

$$x_{\max} = \frac{f_0}{k^2} \frac{e^\delta}{e^\delta - 1}. \quad (3.124)$$

8°. Рассмотрим, следуя А. Н. Крылову,¹ пример колебаний корабля на зыби, когда последовательно проходящие волны разнятся по своим периодам и амплитудам. Качка на такой системе волн имеет существенно иной характер, чем на правильной зыби. А. Н. Крылов объясняет это тем, что „для каждой волны начальными условиями служат значения φ и $\dot{\varphi}$ (угла отклонения корабля и угловой скорости) в конце предыдущей волны. Эти же значения образуются не только от свободных колебаний, но и от вынужденных. По этим значениям определяются для каждой волны соответствующие произвольные постоянные. Таким образом, свободные колебания с прохождением каждой волны как бы обновляются за счёт вынужденных“.

Уравнение колебаний корабля интегрируется для каждой проходящей волны по отдельности и произвольные постоян-

¹ А. Н. Крылов и Ю. А. Круглов, Общая теория гироскопов, 1932, стр. 93.

ные последовательно определяются по начальным условиям, вычисляемым из рассмотрения движения на предыдущем этапе. Чтобы просчитать таким образом эффект действия n волн, нужно определить $2n$ произвольных постоянных. Метод операционного исчисления позволяет избежать этого и тем значительно сокращает вычисление.

Назовём через $T_1, T_2, \dots$ периоды первой, второй и т. д. волны, через $a_1, a_2, \dots$ — соответствующие волновые склоны. Отсчёт времени ведём от начала прохождения первой волны; s -ая волна проходит в промежутке времени

$$T_1 + T_2 + \dots + T_{s-1} = t_{s-1} \leq t \leq t_s = T_1 + T_2 + \dots + T_s.$$

Возмущающий момент, создаваемый этой волной, можно представить в виде

$$f_s(t) = k^2 a_s [\sigma_0(t - t_{s-1}) \sin \omega_s(t - t_{s-1}) - \sigma_0(t - t_s) \sin \omega_s(t - t_s)],$$

где $\omega_s = \frac{2\pi}{T_s}$ и k^2 — квадрат частоты свободных колебаний корабля.

Из этой записи следует, что при $t < t_{s-1}$:

$$f_s(t) = 0;$$

при $t_{s-1} < t < t_s$ имеем:

$$f_s(t) = k^2 a_s \sin \omega_s(t - t_{s-1})$$

и, наконец, при $t > t_s = t_{s-1} + \frac{2\pi}{\omega_s}$:

$$f_s(t) = k^2 a_s \left[\sin \omega_s(t - t_{s-1}) - \sin \omega_s \left(t - t_{s-1} - \frac{2\pi}{\omega_s} \right) \right] = 0,$$

что и требуется. Но по теореме запаздывания:

$$\sigma_0(t - t_\lambda) \sin \omega_\lambda(t - t_\lambda) \leftarrow \div e^{-pt_\lambda} \frac{\omega_\lambda p}{p^2 + \omega_\lambda^2}$$

и, следовательно:

$$f_s(t) \leftarrow \div k^2 a_s e^{-pt_{s-1}} (1 - e^{-pT_s}) \frac{p \omega_s}{p^2 + \omega_s^2},$$

Уравнение колебаний корабля записывается в форме:

$$\ddot{\varphi} + 2n\dot{\varphi} + k^2\varphi = \sum_{s=1}^n f_s(t), \quad (3.125)$$

и соответствующее изображающее уравнение при $\varphi_0 = \dot{\varphi}_0 = 0$ будет:

$$\begin{aligned} \Phi(p)(p^2 + 2np + k^2) &= \\ &= k^2 \sum_{s=1}^n a_s e^{-pt_{s-1}} (1 - e^{-pT_s}) \frac{\omega_s p}{p^2 + \omega_s^2} \end{aligned} \quad (3.126)$$

(в этой записи $t_0 = 0$).

По (69) имеем:

$$\begin{aligned} &\frac{p\omega_s}{(p^2 + \omega_s^2)(p^2 + 2np + k^2)} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{\lambda_s}{k^2} \left[\sin(\omega_s t + \gamma_s) + \frac{\omega_s}{k_1} e^{-nt} \sin(k_1 t + \delta_s) \right], \end{aligned}$$

где λ_s , γ_s , δ_s даются формулами (68) с заменой ω на ω_s .

Обозначая теперь

$$\begin{aligned} \Phi_s(p) &= \\ &= k^2 a_s e^{-pt_{s-1}} (1 - e^{-pT_s}) \frac{\omega_s p}{(\omega_s^2 + p^2)(p^2 + 2np + k^2)} \rightarrow \varphi_s(t), \end{aligned}$$

находим:

$$\varphi_s(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } t \leq t_{s-1}; \\ a_s \lambda_s \left\{ \sin[\omega_s(t - t_{s-1}) + \gamma_s] + \right. \\ \quad \left. + \frac{\omega_s}{k_1} e^{-n(t - t_{s-1})} \sin[k_1(t - t_{s-1}) + \delta_s] \right\} & \text{при } t_{s-1} \leq t \leq t_s; \\ a_s \lambda_s \frac{\omega_s}{k_1} e^{-n(t - t_{s-1})} \{ \sin[k_1(t - t_{s-1}) + \delta_s] - \\ - e^{nT_s} \sin[k_1(t - t_s) + \delta_s] \} & \text{при } t_s \leq t. \end{cases} \quad (3.127)$$

Поэтому при $t_{m-1} \leq t \leq t_m$ имеем:

$$\varphi(t) = \sum_{s=1}^{m-1} \varphi_s(t) + \varphi_m(t), \quad (3.128)$$

причём последнее слагаемое вычисляется по второму выражению (127), а слагаемые под знаком суммы — по третьему.

Из этой общей формулы можно получить ряд интересных частных случаев, задаваясь тем или иным законом изменения возмущающей силы.

Просчитаем, например, следуя А. Н. Крылову, процесс прохождения нескольких волн с одинаковыми волновыми склонами, но разнящихся друг относительно друга по периодам: $T_1 = 8,2$ сек., $T_2 = 7,7$ сек., $T_3 = 7,5$ сек., $T_4 = 8,5$ сек., $T_5 = 7,7$ сек.

Период свободных колебаний корабля примем равным $T = \frac{2\pi}{k} = 12$ сек., $n = 0,05 k = 0,026$ 1/сек. Значения постоянных λ , γ , δ и других, вычисленные по этим данным, приводятся ниже.

№	ω_s 1/сек	$\frac{\omega_s}{k_1} \approx \frac{\omega_s}{k}$	λ_s	γ_s	δ_s	e^{nT_s}	$k_1 T_s$
1	0,767	1,46	0,89	—3,01	0,088	1,51	4,31
2	0,816	1,55	0,74	—3,03	0,071	1,47	4,05
3	0,838	1,60	0,67	—3,04	0,064	1,45	3,93
4	0,741	1,41	0,01	—2,90	0,101	1,53	4,46
5	0,816	1,55	0,74	—3,03	0,071	1,47	4,05

По (128) получаем:

а) при $0 \leq t \leq 8,2$ сек. (первая волна):

$$\frac{\varphi(t)}{a} = 0,89 \sin(0,767t - 3,01) + 1,30e^{-0,026t} \sin(0,525t + 0,088);$$

б) при $8,2 \text{ сек.} \leq t \leq 15,9 \text{ сек.}$ (вторая волна):

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{a} = & 1,30e^{-0,026t} [\sin(0,525t + 0,088) - \\ & - 1,51 \sin(0,525t + 0,088 - 4,31)] + \\ & + 0,74 \sin(0,816t - 3,03 + 0,816 \cdot 8,2) + \\ & + 1,73e^{-0,026t} \sin(0,525t + 0,071 - 4,31), \end{aligned}$$

в) при $15,9 \text{ сек.} \leq t \leq 23,4 \text{ сек.}$:

$$\begin{aligned} \frac{\varphi(t)}{a} = & 0,89 \cdot 1,46 e^{-0,026t} [\sin(0,525t + 0,088) - \\ & - 1,51 \sin(0,525t + 0,088 - 4,31)] + \\ & + 0,74 \cdot 1,55 e^{-0,026(t-8,2)} [\sin(0,525t + 0,071 - 0,525 \cdot 8,2) - \\ & - 1,47 \sin(0,525t + 0,071 - 4,05)] + \\ & + 0,67 [\sin(0,838t - 3,04 - 0,838 \cdot 15,9) + \\ & + e^{-0,026(t-15,9)} 1,60 \sin(0,525t + 0,064 - 0,525 \cdot 15,9)] \end{aligned}$$

и т. д.

§ 18. Применение операционного исчисления к задачам об изгибе стержней

1°. Основные уравнения теории изгиба стержней. Приведём в возможно краткой форме вывод этих уравнений.

Ось x направим по оси стержня, т. е. по линии центров тяжести поперечных сечений, ось y — по одной из главных

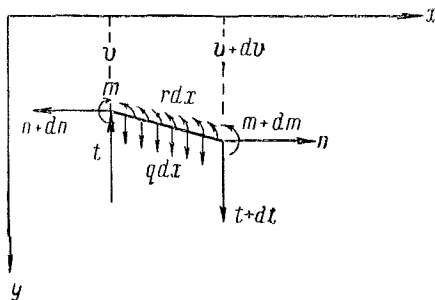


Рис. 24. К выводу уравнений статики стержня.

осей инерции. Будем рассматривать изгиб стержня в плоскости xu , вызываемой распределённой поперечной нагрузкой q и распределённой моментной нагрузкой r на единицу длины оси стержня. Напряжения в любом поперечном сечении стержня статически эквивалентны растягивающей силе n , перерезывающей силе t

и изгибающему моменту m . Поэтому на выделенный элемент стержня dx в деформированном состоянии будут действовать силы и моменты, показанные на рис. 24 (если силы и моменты имеют направления, показанные на этом рисунке, то n , t , m положительны). Составляем три уравнения

статики — два уравнения проекций на оси x и y и одно уравнение моментов:

$$dn = 0, \quad dt + q dx = 0, \quad dm - t dx + n dv + r dx = 0$$

или

$$n = \text{const}, \quad t' + q = 0, \quad m' - t + nv' + r = 0. \quad (3.129)$$

К этим уравнениям присоединяется основное соотношение теории изгиба, выражающее пропорциональность кривизны оси изогнутого стержня изгибающему моменту

$$EIv'' = -m. \quad (3.130)$$

Средства операционного исчисления позволяют с большой простотой трактовать случаи загрузки стержня нагрузками, не описываемыми единым аналитическим законом, по длине стержня, сосредоточенными силами и сосредоточенными моментами.

Пусть на участке стержня $(\xi, \xi + h)$ действует равномерно распределённая нагрузка q_0 ; это можно выразить такой записью:

$$q(x) = q_0 [\sigma_0(x - \xi) - \sigma_0(x - \xi - h)] \leftarrow \div q_0 e^{-px} (1 - e^{-ph}).$$

Допустим, что отрезок h , по которому распределена нагрузка, стремится к нулю, но при этом одновременно интенсивность нагрузки возрастает так, что произведение $q_0 h$ сохраняет постоянное значение Q_0 ; в пределе при $h \rightarrow 0$ мы получаем то, что называется силой, сосредоточенной в точке $x = \xi$; итак, действие такой силы можно учесть, включая в распределённую нагрузку слагаемое

$$\lim_{h \rightarrow 0} qh \frac{\sigma_0(x - \xi) - \sigma_0(x - \xi - h)}{h} = Q_0 \sigma_1(x - \xi) \leftarrow \div Qpe^{-px}. \quad (3.131)$$

Рассмотрим действие двух сосредоточенных сил: силы Q_0 в точке $x = \xi$ и силы $(-Q_0)$ в точке $x = \xi + h$; в этом случае в нагрузку $q(x)$ нужно включить слагаемое

$$Q_0 [\sigma_1(x - \xi) - \sigma_1(x - \xi - h)]. \quad (3.132)$$

¹ Применение обозначений m , t и т. д. вместо общеупотребительных прописных букв объясняется тем, что последние будут обозначать изображения соответствующих величин: $M(p) \rightarrow m(x)$, $T(p) \rightarrow t(x)$ и т. д.

Эти силы образуют пару с моментом $R = Q_0 h$. К понятию сосредоточенного момента в точке $x = \xi$ приходим, полагая, что $h \rightarrow 0$, но Q_0 возрастает так, что R сохраняет неизменное значение; совершая в (132) этот предельный переход, получаем:

$$\lim_{h \rightarrow 0} Q_0 h \frac{\sigma_1(x - \xi) - \sigma_1(x - \xi - h)}{h} = R \sigma_2(x - \xi) \leftarrow R p^2 e^{-p\xi}. \quad (3.133)$$

Итак, сосредоточенные силы и моменты можно включать в распределённую нагрузку, используя импульсивные функции первого и второго порядка.

2°. Рассмотрим несколько простых примеров.

а) Построить упругую линию консольного стержня ступенчато-изменяющимся поперечного сечения; стержень нагружен в точке $x = \xi$ сосредоточенной силой Q_0 (рис. 25).

В данном случае

$$q(x) = Q_0 \sigma_1(x - \xi) \leftarrow \leftarrow Q_0 p e^{-p\xi}$$

Рис. 25. Консольный стержень со ступенчато-изменяющимся поперечным сечением.

и дифференциальное уравнение для перерезывающей силы будет:

$$T'(x) = -Q_0 \sigma_1(x - \xi).$$

Его изображение записывается в виде:

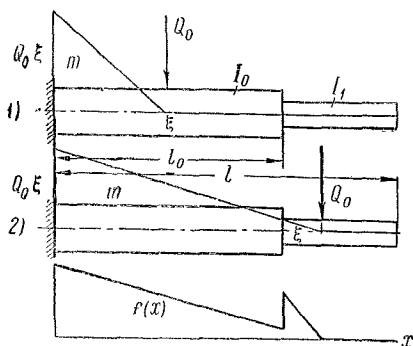
$$pT(p) = pt_0 - Q_0 p e^{-p\xi}, \quad T(p) = t_0 - Q_0 e^{-p\xi}.$$

Ясно, что опорная реакция t_0 в данном случае равна Q_0 . В уравнении моментов (129) в рассматриваемом случае $n = 0$, $r = 0$. Поэтому

$$pM(p) = pm_0 + t_0 - Q_0 e^{-p\xi},$$

и, следовательно,

$$m(x) = m_0 + \begin{cases} Q_0 x & \text{при } x < \xi \\ Q_0 \xi & \text{при } x > \xi \end{cases}$$



При $x = l$ (на правом краю стержня) должны иметь $m = 0$; значит, $m_0 = -Q_0\xi$.

Итак,

$$m(x) = \begin{cases} -Q_0(\xi - x) & \text{при } x < \xi \\ 0 & \text{при } x > \xi \end{cases}$$

Теперь получаем:

$$v''(x) = -\frac{m(x)}{EI} = \begin{cases} -\frac{m(x)}{EI_0} & \text{при } x < l_0 \\ -\frac{m(x)}{EI_1} & \text{при } l_0 < x < l \end{cases}$$

и надо различать случаи: 1) $l_0 > \xi$ и 2) $l_0 < \xi$.

В первом случае

$$v''(x) = \begin{cases} \frac{Q_0}{EI_0}(\xi - x) & \text{при } x < \xi \\ 0 & \text{при } x > \xi \end{cases}$$

и, что само по себе ясно, наличие изменения момента инерции не влияет на форму упругой линии. Во втором случае:

$$v''(x) = f(x) = \begin{cases} \frac{Q_0}{EI_0}(\xi - x) & \text{при } x < l_0 \\ \frac{Q_0}{EI_1}(\xi - x) & \text{при } l_0 < x < \xi \\ 0 & \text{при } \xi < x \end{cases}$$

Изображение правой части строим по (1.91):

$$F(p) = \frac{Q_0}{EI_0} \left[\xi - \frac{1}{p} - \left(\xi - l_0 - \frac{1}{p} \right) e^{-pl_0} \right] + \\ + \frac{Q_0}{EI_1} \left[\left(\xi - l_0 - \frac{1}{p} \right) e^{-pl_0} + \frac{1}{p} e^{-p\xi} \right]$$

и изображение уравнения изгиба будет

$$p^2 V(p) = \frac{Q_0}{EI_0} \left(\xi - \frac{1}{p} \right) + \left(\frac{Q_0}{EI_0} - \frac{Q_0}{EI_1} \right) \left(\xi - l_0 - \frac{1}{p} \right) e^{-pl_0} + \\ + \frac{Q_0}{EI_1} \frac{1}{p} e^{-p\xi},$$

так как для консольно закреплённого стержня $v(0) = v'(0) = 0$.

Получаем

$$v(x) = \begin{cases} \frac{Q_0}{EI_0} \left(\frac{\xi x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) & \text{при } 0 \leq x \leq l_0 \\ \frac{Q_0}{EI_0} \left(\frac{\xi x^2}{2} - \frac{x^3}{6} \right) + \left(\frac{Q_0}{EI_0} - \frac{Q_0}{EI_1} \right) \frac{(x-l_0)^2}{2} \times \\ \quad \times \left[\xi - l_0 - \frac{1}{3}(x-l_0) \right] & \text{при } l_0 \leq x \leq \xi \\ \text{то же самое} + \frac{Q}{EI_1} \frac{(x-\xi)^3}{6} & \text{при } \xi \leq x \leq l \end{cases}$$

б) Второй пример представлен на рис. 26.

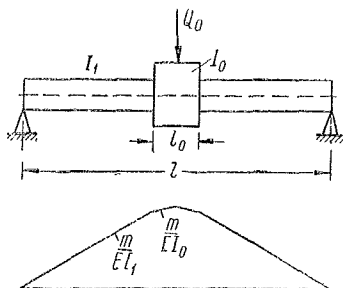


Рис. 26. Балка на двух опорах со ступенчато-изменяющимся поперечным сечением.

Вследствие симметрии достаточно рассмотреть половину балки $0 < x < \frac{l}{2}$.

Изгибающий момент будет

$$m(x) = \frac{Qx}{2},$$

откуда следует

$$v''(x) = f(x) = \begin{cases} -\frac{Q}{2} \frac{x}{EI_1} & x < \frac{l-l_0}{2} \\ -\frac{Q}{2} \frac{x}{EI_0} & \frac{l-l_0}{2} < x < \frac{l}{2} \end{cases}$$

Имеем по (1:91):

$$F(p) = -\frac{Q}{E} \left\{ \left[\frac{1}{p} - \left(\frac{1}{p} + \frac{l-l_0}{2} \right) e^{-\frac{p(l-l_0)}{2}} \right] \frac{1}{l_0} + \right. \\ \left. + \left[\left(\frac{1}{p} + \frac{l-l_0}{2} \right) e^{-p \frac{l-l_0}{2}} + \left(\frac{1}{p} + \frac{l}{2} \right) e^{-\frac{pl}{2}} \right] \frac{1}{l_1} \right\}.$$

Замечая далее, что $v(0) = 0$, получим:

$$V(p) = \frac{v'(0)}{p} + \frac{1}{p^2} F(p).$$

Остаётся перейти к начальным функциям:

$$v(x) = v'_0 x - \frac{Qx^3}{12EI_0} \quad \text{при } x < \frac{l-l_0}{2}, \\ v(x) = v'_0 x - \frac{Qx^3}{12EI_0} + \frac{Q}{12EI_0} \left(1 - \frac{l_0}{l_1} \right) \left(x - \frac{l-l_0}{2} \right)^2 (x + l-l_0) \\ \text{при } \frac{l-l_0}{2} < x < \frac{l}{2}.$$

Постоянная v'_0 определяется из условия $v'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$.

Получаем

$$v(x) = \begin{cases} \frac{Ql^2x}{16EI_0} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x^2}{l^2} \right) - \left(1 - \frac{l_0}{l_1} \right) \frac{Ql_0x}{8EI_0} \left(l - \frac{l_0}{2} \right) \\ \text{при } x < \frac{l-l_0}{2} \\ \frac{Ql^2x}{16EI_1} \left(1 - \frac{4}{3} \frac{x^2}{l^2} \right) + \left(1 - \frac{l_0}{l_1} \right) \frac{Q(l-l_0)^3}{48EI_0} \\ \text{при } \frac{l-l_0}{2} < x < \frac{l}{2}. \end{cases}$$

в) Третий пример представлен на рис. 27. Отбрасывая опору, заменяем её действие сосредоточенной силой Q_1 . Это позволяет составить выражение нагрузки в форме

$$q(x) = Q\sigma_1\left(x - \frac{l}{2}\right) - Q_1\sigma_1(x-l) \leftarrow Qpe^{-\frac{pl}{2}} - Q_1pe^{-pl}.$$

Изображение уравнения моментов будет:

$$p^2 M(p) = p^2 m_0 + p m'_0 - p \left(Q e^{-\frac{pl}{2}} - Q_1 e^{-pl} \right),$$

откуда следует, что

$$m(x) = \begin{cases} m_0 + m'_0 x & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ m_0 + m'_0 x - Q \left(x - \frac{l}{2} \right) & \frac{l}{2} \leq x \leq l \\ m_0 + m'_0 x - Q \left(x - \frac{l}{2} \right) + Q_1 (x - l) & l \leq x \leq 2l \end{cases}$$

Постоянные m_0 и m'_0 определяются из условий на

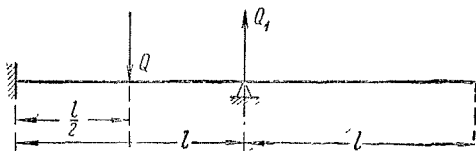


Рис. 27. Консольный стержень с промежуточной опорой.

свободном конце стержня $m'_0(2l) = 0$, $m(2l) = 0$; получаем

$$m_0 = Q_1 l - \frac{Ql}{2}, \quad m'_0 = Q - Q_1,$$

что, впрочем, ясно из простых соображений статики. Теперь находим:

$$M(p) = Q \left[-\frac{l}{2} + \frac{1}{p} (1 - e^{-\frac{pl}{2}}) \right] - Q_1 \left[-l + \frac{1}{p} (1 - e^{-pl}) \right].$$

Учитывая, что $v(0) = 0$, $v'(0) = 0$, получаем изображение уравнения изгиба (130):

$$V(p) = -\frac{M(p)}{Elp^2}.$$

Переходя к начальной функции, получим:

$$EI v(x) = \begin{cases} -Q\left(-\frac{lx^2}{4} + \frac{x^3}{6}\right) + Q_1\left(-\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) & 0 < x < \frac{l}{2} \\ -Q\left[-\frac{lx^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{(x-0,5l)^3}{6}\right] + Q_1\left(-\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6}\right) & \frac{l}{2} < x < l \\ -Q\left[-\frac{lx^2}{4} + \frac{x^3}{6} - \frac{(x-0,5l)^3}{6}\right] + Q_1\left[-\frac{lx^2}{2} + \frac{x^3}{6} - \frac{(x-l)^3}{6}\right] & l < x < 2l. \end{cases}$$

Неизвестную Q_1 определяем из условия $v(l) = 0$; находим $Q_1 = \frac{5}{16} Q$ и далее

$$v(x) = \begin{cases} \frac{Q}{32EI} \left(3lx^2 - \frac{11}{3}x^3\right) & 0 \leq x \leq \frac{l}{2} \\ \frac{5}{96EI} (x-l) \left(x^2 - 2lx + \frac{2}{5}l^2\right) & \frac{l}{2} \leq x \leq l \\ -\frac{Ql^2}{32EI} (x-l) & l \leq x \leq 2l \end{cases}$$

3°. Как ещё один пример рассмотрим задачу об изгибе стержня, сжатого продольными силами



Рис. 28. Изгиб стержня, сжатого продольными силами.

и нагруженного в середине сосредоточенной силой Q . Из (129) и (130) получим дифференциальное уравнение изгиба:

$$EI v^{IV} = q + nv'' \quad (3.134)$$

В данном случае (сжатие) имеем:

$$n = -T, \quad q(x) = Q\sigma_1\left(x - \frac{l}{2}\right) \leftarrow \div Qpe^{-\frac{pl}{2}},$$

и изображающее уравнение будет

$$p^2(p^2 + \lambda^2) V(p) = \frac{Q}{EI} pe^{-\frac{pl}{2}} + v'(0)p(p^2 + \lambda^2) + pv'''(0),$$

где приняты во внимание условия на левой опоре $v(0) = 0$, $v''(0) = 0$ и обозначено $\lambda^2 = \frac{T}{EI}$.

Тогда

$$V(p) = \frac{Q}{EI} \frac{e^{-\frac{pl}{2}}}{p(p^2 + \lambda^2)} + \frac{v'(0)}{p} + \frac{v'''(0)}{p(p^2 + \lambda^2)}$$

и, имея в виду, что

$$\frac{1}{p(p^2 + \lambda^2)} = \frac{1}{\lambda^2} \left(\frac{1}{p} - \frac{p}{p^2 + \lambda^2} \right) \rightarrow \frac{1}{\lambda^2} \left(x - \frac{1}{\lambda} \sin \lambda x \right)$$

получим, ограничиваясь по симметрии рассмотрением левой части балки,

$$v(x) = v'(0)x + v'''(0) \cdot \frac{\lambda x - \sin \lambda x}{\lambda^3}.$$

Для определения постоянных $v'(0)$ и $v'''(0)$ используем условие $v'\left(\frac{l}{2}\right) = 0$ и уравнения (129) и (130); последние в нашем случае при $t = \frac{Q}{2}$ дают

$$v'''(0) + \lambda^2 v'(0) = -\frac{Q}{2EI}.$$

Получаем

$$v'''(0) = -\frac{Q}{2EI \cos \frac{\lambda l}{2}}, \quad v'(0) = \frac{Q}{2EI \lambda^2} \frac{1 - \cos \frac{\lambda l}{2}}{\cos \frac{\lambda l}{2}}$$

и, следовательно:

$$v(x) = \frac{Q l^3}{2EI} \frac{1}{(\lambda l)^3} \left(\frac{\sin \lambda x}{\cos \frac{\lambda l}{2}} - \lambda x \right).$$

В частности, прогиб в середине балки будет:

$$v\left(\frac{l}{2}\right) = 3f \frac{\lg \xi - \xi}{\xi^3} \quad \left(f = \frac{Ql^3}{48EI}, \quad \xi = \frac{\lambda l}{2}\right),$$

где f обозначает прогиб при отсутствии сжимающей силы

При $\xi = \frac{\pi}{2}$, т. е. когда T достигает эйлерова критического значения $\frac{\pi^2 EI}{l^2}$, прогиб неограниченно возрастает.

4°. Все рассмотренные выше примеры были весьма просты. Они приводились лишь с целью пояснения метода, так как решение их обычными средствами сопротивления материалов не представляет затруднений. Экономия труда, достигаемая применением операционного метода, становится вполне наглядной при переходе к более сложным задачам. Из них в первую очередь рассмотрим задачу об изгибе балки, лежащей на упругом основании, тем более что всё необходимое для этого уже подготовлено в 7° § 3.

Во внешнюю нагрузку $q(x)$ теперь надо включить реакцию упругого основания. Уравнение изгиба (134) будет иметь вид:

$$EI v^{IV}(x) = -kv(x) + q(x) \quad (3.135)$$

и его изображение будет

$$V(p)(p^4 + 4\alpha^4) = v(0)p^4 + v'(0)p^3 + \\ + v''(0)p^2 + v'''(0)p + \frac{Q(p)}{EI}, \quad (3.136)$$

где обозначено $4\alpha^4 = \frac{k}{EI}$; две из четырёх постоянных $v(0)$, ..., $v'''(0)$ сразу определяются из условий на левом крае балки. Итак,

$$V(p) = v_0 \frac{p^4}{p^4 + 4\alpha^4} + v'_0 \frac{p^3}{p^4 + 4\alpha^4} + v''_0 \frac{p^2}{p^4 + 4\alpha^4} + \\ + v'''_0 \frac{p}{p^4 + 4\alpha^4} + \frac{Q(p)}{EI p} \cdot \frac{p}{p^4 + 4\alpha^4}, \quad (3.137)$$

откуда по (1.53) и по теореме свёртывания сразу же следует известное решение А. Н. Крылова:

$$v(x) = v_0 Y_1(\alpha x) + \frac{v_0'}{\alpha} Y_2(\alpha x) + \frac{v_0''}{\alpha^2} Y_3(\alpha x) + \\ + \frac{v_0'''}{\alpha^3} Y_4(\alpha x) + \frac{1}{EI\alpha^3} \int_0^x Y_4(\alpha x - \alpha \xi) q(\xi) d\xi. \quad (3.138)$$

Две остающихся постоянных определяются из условий на правом крае балки.

Конечно, частное решение, т. е. последнее слагаемое в (138), назовем его $v^*(x)$, не обязательно находить по теореме свёртывания — часто гораздо проще его составить непосредственно, зная изображение нагрузки $Q(p) \rightarrow q(x)$.

Пусть, например, $q(x) = q_0 = \text{const.}$ Получаем

$$V^*(p) = \frac{q_0}{EI} \frac{1}{p^4 + 4\alpha^4} = \frac{q_0}{4\alpha^4 EI} \left(1 - \frac{p^4}{p^4 + 4\alpha^4}\right) \rightarrow \\ \rightarrow \frac{q_0}{4\alpha^4 EI} [1 - Y_1(\alpha x)] = v^*(x).$$

Если равномерная нагрузка распределена по части пролёта (x_1, x_2) , т. е.

$$q = q_0 [\sigma_0(x - x_1) - \sigma_0(x - x_2)] \leftarrow q_0 (e^{-px_1} - e^{-px_2}),$$

то найдём

$$V^*(p) = \frac{q_0}{4\alpha^4 EI} \left[\left(1 - \frac{p^4}{p^4 + 4\alpha^4}\right) e^{-px_1} - \left(1 - \frac{p^4}{p^4 + 4\alpha^4}\right) e^{-px_2} \right]$$

и, значит:

$$\frac{4\alpha^4 EI}{q_0} v^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 \leq x \leq x_1 \\ 1 - Y_1(\alpha x - \alpha x_1) & \text{при } x_1 \leq x \leq x_2 \\ Y_1(\alpha x - \alpha x_2) - Y_1(\alpha x - \alpha x_1) & \text{при } x_2 \leq x \leq l \end{cases}$$

Наконец, при наличии в сечении $x = \xi$ сосредоточенной силы Q_0 и сосредоточенного момента R_0 имеем:

$$q(x) = Q_0 \sigma_1(x - \xi) + R_0 \sigma_2(x - \xi) \leftarrow (Q_0 p + R_0 p^2) e^{-p\xi}$$

и соответствующее частное решение будет:

$$Elv^*(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x < \xi \\ \frac{Q_0}{\alpha^3} Y_4(\alpha x - \alpha \xi) + \frac{R_0}{\alpha^2} Y_3(\alpha x - \alpha \xi) & \text{при } \xi < x \end{cases}$$

Как пример, рассмотрим схему загрузки, приведённую на рис. 29; края балки свободны (железнодорожная шпала).

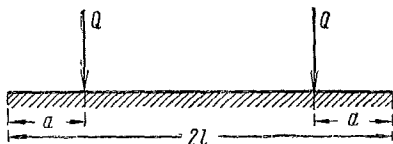


Рис. 29. Пример изгиба балки на упругом основании (железнодорожная шпала).

Достаточно вследствие симметрии рассмотреть лишь половину балки; по условию имеем $v''(0) = v'''(0) = 0$. По (137) получаем:

$$v(x) = v_0 Y_1(\alpha x) + \frac{v'_0}{\alpha} Y_2(\alpha x) + \begin{cases} 0 & x < a \\ \frac{Q_0}{EI\alpha^3} Y_4(\alpha x - \alpha a) & a < x < l \end{cases}$$

Остающиеся постоянные находим из условий $v'(l) = 0$, $v'''(l) = 0$, выражающих, что в середине балки прогиб и изгибающий момент достигают максимума; по таблице производных функций А. Н. Крылова получаем:

$$4v_0 Y_4(\alpha l) - \frac{v'_0}{\alpha} Y_1(\alpha l) = \frac{Q_0}{EI\alpha^3} Y_3(\alpha l - \alpha a),$$

$$4v_0 Y_2(\alpha l) + \frac{4v'_0}{\alpha} Y_3(\alpha l) = \frac{Q_0}{EI\alpha^3} Y_1(\alpha l - \alpha a).$$

Тогда:

$$v_0 = \frac{Q_0}{EI\alpha^3} \cdot \frac{4Y_3(\alpha l - \alpha a) Y_3(\alpha l) + Y_1(\alpha l - \alpha a) Y_1(\alpha l)}{\operatorname{sh} 2\alpha l + \sin 2\alpha l},$$

$$v'_0 = \frac{4Q_0}{EI\alpha^3} \cdot \frac{Y_1(\alpha l - \alpha a) Y_4(\alpha l) - Y_3(\alpha l - \alpha a) Y_2(\alpha l)}{\operatorname{sh} 2\alpha l + \sin 2\alpha l},$$

и нахождение числовых результатов при заданных al и a/l теперь не представляет труда.

Заметим, что к полученному выше значению $v(x)$ следует добавить слагаемое Q/kl , выражающее смещение балки как твёрдого тела.

§ 19. Применение операционного исчисления к задаче изгиба тонкой плиты

Дифференциальное уравнение изгиба плиты имеет вид:

$$\Delta \Delta w = \frac{1}{N} q(x, y), \quad (3.139)$$

где N — цилиндрическая жесткость, $q(x, y)$ — нагрузка на единицу площади плиты, $w(x, y)$ — смещение точек средней поверхности плиты; через $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ обозначен оператор Лапласа. Найдя w , далее выразим по известным формулам изгибающие и крутящие моменты и перерезывающие силы.

В полярных координатах r, φ дифференциальное уравнение (139) имеет вид:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{r^2 \partial \varphi^2} \right) \left(\frac{\partial^2 w}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 w}{\partial \varphi^2} \right) = \frac{1}{N} q(r, \varphi). \quad (3.140)$$

1°. Начнем со случая симметрично нагруженной круглой плиты: $q = q(r)$. Дифференциальное уравнение изгиба будет:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} \right) \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \frac{1}{N} q(r). \quad (3.141)$$

Вводим новое независимое переменное

$$r = r_0 e^{-t}, \quad (3.142)$$

где r_0 — радиус внешнего края плиты; при возрастании r от нуля до r_0 переменная t убывает от ∞ до нуля. Получаем формулы дифференцирования:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{dr} &= -\frac{1}{r_0} e^t w', & \frac{d^2 w}{dr^2} &= \frac{1}{r_0^2} e^{2t} (w'' + w'), \\ \Delta w &= \frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} = \frac{1}{r_0^2} e^{2t} w'', & \frac{d}{dr} \Delta w &= -\frac{1}{r_0^3} e^{3t} (w''' + 2w''), \end{aligned}$$

где штрихами обозначены производные по t ,

С помощью этих формул получаем выражение изгибающих моментов g_r и g_φ и перерезывающей силы n_r :

$$\left. \begin{aligned} g_r &= -N \left(\frac{d^2 w}{dr^2} + \frac{1}{mr} \frac{dw}{dr} \right) = \\ &= -\frac{N}{r_0^2} e^{2t} \left(w'' + \frac{m-1}{m} w' \right); \\ g_\varphi &= -N \left(\frac{d^2 w}{m dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw}{dr} \right) = \\ &= -\frac{N}{r_0^2} e^{2t} \left(\frac{1}{m} w'' - \frac{m-1}{m} w' \right); \\ n_r &= -N \frac{d\Delta w}{dr} = \frac{N}{r_0^3} e^{3t} (w''' + 2w''), \end{aligned} \right\} \quad (3.143)$$

где m — число Пуассона. Дифференциальное уравнение изгиба (141) примет вид:

$$w^{IV} + 4w''' + 4w'' = \frac{r_0^4}{N} e^{-4t} q(r_0 e^{-t}) = \frac{r_0^4}{N} e^{-4t} q^*(t). \quad (3.144)$$

Рассмотрим случай загрузки плиты силами, распределёнными по окружности радиуса $\rho = r_0 e^{-\tau}$. Чтобы найти изображение этой нагрузки, сначала предположим, что плита равномерно нагружена по площади кольца с внешним радиусом $\rho + h$ и внутренним ρ :

$$\rho = r_0 e^{-\tau}, \quad \rho + h = r_0 e^{-(\tau-\varepsilon)} \approx r_0 e^{-\tau} (1 + \varepsilon), \quad \varepsilon \approx \frac{h}{\rho}.$$

Далее можно написать соотношение:

$$q^*(t) = q_0 [\sigma_0(t - \tau + \varepsilon) - \sigma_0(t - \tau)],$$

выражающее, что

$$q^*(t) = \begin{cases} 0 & \text{при } 0 < t < \tau - \varepsilon \text{ или } r_0 > r > \rho + h, \\ q_0 & \text{„ } \tau - \varepsilon \leq t < \tau \text{ „ } \rho + h > r > \rho, \\ 0 & \text{„ } \tau < t < \infty \text{ „ } \rho > r > 0. \end{cases}$$

Получаем:

$$q^*(t) \leftarrow q_0 [e^{-p(\tau-\varepsilon)} - e^{-p\tau}] = \frac{q_0 h}{\rho} e^{-p\tau} \frac{e^{p\varepsilon} - 1}{\varepsilon}.$$

Полагая теперь, что $\varepsilon \rightarrow 0$, причём $\lim q_0 h = S$, где S обозначает нагрузку на единицу длины, получаем:

$$q^*(t) \leftarrow \div \frac{S}{\rho} p e^{-p\tau}$$

и, следовательно, по VIII табл. 1:

$$e^{-4t} q^*(t) \leftarrow \div \frac{S}{\rho} \frac{p}{p+4} (p+4) e^{-(p+4)\tau} = \frac{S\rho^3}{r_0^4} p e^{-p\tau}. \quad (3.145)$$

Изображение дифференциального уравнения изгиба (144) будет:

$$p^2(p+2)^2 W(p) = \frac{S\rho^3}{N} p e^{-p\tau} + w_0 p^2(p+2)^2 + w_0' p(p+2)^2 + w_0'' p(p+4) + w_0''' p,$$

где $w_0, \dots, w_0'''$ — значение w и его производных по t при $r = r_0$, т. е. на внешнем крае плиты. Тогда:

$$W(p) = \frac{S\rho^3}{N} \frac{e^{-p\tau}}{p(p+2)^2} + w_0 + \frac{w_0'}{p} + w_0'' \frac{p+4}{p(p+2)^2} + \frac{w_0'''}{p(p+2)^2}. \quad (3.146)$$

Из (143) имеем:

$$\left. \begin{aligned} w_0' &= -r_0 \left(\frac{dw}{dr} \right)_0 = -r_0 \alpha_0; \\ w_0'' &= -\frac{r_0^2 g_r^0}{N} + \frac{m-1}{m} r_0 \alpha_0; \\ w_0''' &= \frac{r_0^3 n_r^0}{N} + \frac{2r_0^2 g_r^0}{N} - \frac{2(m-1)}{m} r_0 \alpha_0, \end{aligned} \right\} \quad (3.147)$$

где g_r^0, n_r^0, α_0 — значения на крае $r = r_0$ изгибающего момента, перерезывающей силы и угла поворота; из четырёх величин $w_0, g_r^0, n_r^0, \alpha_0$ две известны; поэтому в (146) из четырёх постоянных $w_0, \dots, w_0'''$ неизвестны будут только две.

Начальные функции для изображений в выражении (146) были построены в § 4 как пример на применения второй

теоремы разложения. Воспользовавшись приведёнными там результатами, получаем:

$$\left. \begin{aligned} &\text{при } 0 < t < \tau, \text{ т. е. } r_0 > r > \rho: \\ &w = w_0 + w'_0 t + w''_0 \left(t - \frac{3}{4} + \frac{1}{2} t e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{-2t} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} w'''_0 (t - 1 + t e^{-2t} + e^{-2t}); \\ &\text{при } \tau < t < \infty, \text{ т. е. } \rho > r > 0: \\ &w = w_0 + w'_0 t + w''_0 \left(t - \frac{3}{4} t + \frac{1}{2} t e^{-2t} + \frac{3}{4} e^{-2t} \right) + \\ &\quad + \frac{1}{4} w'''_0 (t - 1 + t e^{-2t} + e^{-2t}) + \\ &\quad + \frac{S \rho^3}{4N} [t - \tau - 1 + (t - \tau) e^{-2(t - \tau)} + e^{-2(t - \tau)}]. \end{aligned} \right\} \quad (3.148)$$

Две остающиеся произвольные постоянные определяются из условия на внутреннем крае $r = r_1$, т. е. при $t = t_1 = \ln \frac{r_0}{r_1}$.

В случае сплошной плиты, в её центре, т. е. при $t \rightarrow \infty$, должны оставаться конечными прогиб w и его производные по r до третьего порядка; это приводит к требованию обращения в нуль слагаемых, содержащих t и $t e^{-2t}$, и даёт два условия:

$$\left. \begin{aligned} w'_0 + w''_0 + \frac{1}{4} w'''_0 &= -\frac{S \rho^3}{4N}, \\ \frac{1}{2} w''_0 + \frac{1}{4} w'''_0 &= -\frac{S \rho r_0^2}{4N}. \end{aligned} \right\} \quad (3.149)$$

Рассмотрим, например, сплошную плиту, внешний край которой закреплён. Имеем $w_0 = w'_0 = 0$ и из (149) находим w''_0 и w'''_0 . Подставляя в (148) и возвращаясь к переменной r , получим:

$$w(r) = \frac{\rho S}{4N} \left[\frac{1 - r^2}{2} (1 + \rho^2) + W(r, \rho) \right], \quad (3.150)$$

где для простоты письма принято $r_0 = 1$ и введено обозначение

$$W(r, \rho) = \begin{cases} (\rho^2 + r^2) \ln \rho - \rho^2 + r^2 & r < \rho, \\ (\rho^2 + r^2) \ln r & r > \rho. \end{cases} \quad (3.151)$$

Имея это выражение, легко составить выражение прогиба сплошной плиты с защемлённым краем под любой симметричной нагрузкой; для этого в (150) заменяем S на $q(\rho) d\rho$ и производим интегрирование по ρ в пределах $(0, 1)$. Получаем:

$$\begin{aligned} w(r) = & \frac{1}{N} \left[\frac{1}{2} (1 - r^2) \int_0^1 (1 + \rho^2) \rho q(\rho) d\rho + \right. \\ & + \ln r \int_0^r (\rho^2 + r^2) q(\rho) \rho d\rho + r^2 \int_r^1 (1 + \ln \rho) \rho q(\rho) d\rho + \\ & \left. + \int_r^1 (\ln \rho - 1) \rho^3 q(\rho) d\rho \right]. \end{aligned}$$

Аналогично рассматриваются другие случаи закрепления краёв плиты.

2°. Рассмотрим теперь задачу об изгибе круглой плиты несимметричной нагрузкой:

$$q(r, \varphi) = q_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [q_n^{(e)}(r) \cos n\varphi + q_n^{(s)}(r) \sin n\varphi]. \quad (3.152)$$

Прогиб w будем искать также в виде тригонометрического ряда:

$$w(r, \varphi) = w_0(r) + \sum_{n=1}^{\infty} [w_n^{(e)}(r) \cos n\varphi + w_n^{(s)}(r) \sin n\varphi]. \quad (3.153)$$

Первое слагаемое $w_0(r)$ определено в предыдущем пункте. Для определения коэффициентов при $\cos n\varphi$ и $\sin n\varphi$ получаем дифференциальное уравнение:

$$\left(\frac{dr^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{n^2}{r^2} \right) \left(\frac{d^2 w_n}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dw_n}{dr} - \frac{n^2}{r^2} w_n \right) = \frac{1}{N} q_n(r), \quad (3.154)$$

причём для простоты мы отбросили индексы (c) и (s) . Это уравнение подстановкой $r = e^{-t}$ (мы опять полагаем $r_0 = 1$) приводится к виду:

$$\begin{aligned} w_n^{IV} + 4w_n''' + (4 - 2n^2)w_n'' - 4n^2w_n' + (n^4 - 4n^2)w_n = \\ = \frac{1}{N} e^{-4t} q_n(e^{-t}). \end{aligned} \quad (3.155)$$

В случае нагрузки, распределённой по кругу радиуса $\rho = e^{-\tau}$, можно, как и выше, написать:

$$q(r, \varphi) \leftarrow \div \frac{S(\varphi)}{\rho} \rho e^{-\tau},$$

где $S(\varphi)$ — нагрузка на единицу длины. Нужно разложить $S(\varphi)$ в тригонометрический ряд. Мы рассмотрим случай силы Q , сосредоточенной в точке $r = \rho$, $\varphi = 0$. Тогда $\rho S(\varphi)$ можно представить как периодическую функцию периода 2π , изображаемую при $0 < \varphi < 2\pi$ с помощью единичного импульса $Q_0 \sigma_1(\varphi)$. Поэтому изображение $S(\varphi)$ по (1.97) будет:

$$S(\varphi) \leftarrow \div \frac{Q_0}{\rho} \frac{s}{1 - e^{-2\pi s}},$$

где буква s (вместо ρ) применена для составления изображения по переменной φ .

Чтобы найти начальную функцию для этого изображения в форме тригонометрического ряда, воспользуемся второй теоремой разложения. Поступая, как объяснено в 11° § 5, получим:

$$\frac{s}{1 - e^{-2\pi s}} = \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s^2}{s^2 + n^2} \right) \rightarrow \frac{1}{2\pi} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \right),$$

причём ряд в правой части, конечно, расходящийся; но им можно пользоваться в дальнейшем решении подобно тому, как мы пользуемся понятием единичного импульса.¹ Итак, в случае сосредоточенной силы:

$$q(r, \varphi) \leftarrow \div \frac{Q_0}{2\pi \rho^2} \left(1 + 2 \sum_{n=1}^{\infty} \cos n\varphi \right) \rho e^{-\tau} \quad (3.156)$$

¹ Этот ряд суммируем в среднем по Фейеру. См. Г. М. Фихтенгольц, Курс дифференциального и интегрального исчисления, III. ОНТИ, 1949, стр. 751.

и, значит:

$$q_0(e^{-t}) \leftarrow \div \frac{Q_0}{2\pi\rho^2} p e^{-p\tau}, \quad q_n^{(c)}(e^{-t}) \leftarrow \div \frac{Q_0}{\pi\rho^2} p e^{-p\tau}, \quad q_n^{(s)}(e^{-t}) = 0$$

и по (155)

$$e^{-4t} q_n(e^{-t}) \leftarrow \div \frac{Q_0 \rho^2}{\pi} p e^{-p\tau}.$$

Пусть внешний край плиты заземлён, т. е. $w_n(0) = 0$, $w'_n(0) = 0$. Определив $W_n(p)$ из изображающего уравнения, соответствующего (155), получим:

$$W_n(p) = \frac{Q_0 \rho^2 p e^{-p\tau}}{\pi N \Pi_n(p)} + w''_n(0) \frac{p^2 + 4p}{\Pi_n(p)} + w'''_n(0) \frac{p}{\Pi_n(p)};$$

$$\Pi_n(p) = p^4 + 4p^3 + (4 - 2n^2)p^2 - 4n^2p + n^4 - 4n^2.$$

Начальные функции были получены в примере § 4: при $n \neq 1$ получаем для $t > \tau$, т. е. $r < \rho$:

$$w_n(r) = \frac{Q_0 \rho^2}{8\pi N n} \left[\frac{e^{n(t-\tau)}}{n+1} + \frac{e^{-n(t-\tau)}}{n-1} - \frac{e^{(n-2)(t-\tau)}}{n-1} - \right. \\ \left. - \frac{e^{-(n+2)(t-\tau)}}{n+1} \right] + \frac{w''_0(0)}{8n} \left[\frac{n+4}{n+1} e^{nt} - \frac{n-4}{n-1} e^{-nt} - \right. \\ \left. - \frac{n+2}{n-1} e^{(n-2)t} + \frac{n-2}{n+1} e^{-(n+2)t} \right] + \\ + \frac{w'''_n(0)}{8n} \left[\frac{e^{nt}}{n+1} + \frac{e^{-nt}}{n-1} - \frac{e^{(n-2)t}}{n-1} - \frac{e^{-(n+2)t}}{n+1} \right]. \quad (3.157)$$

В случае сплошной плиты постоянные $w''_n(0)$ и $w'''_n(0)$ нужно определить из условия конечности прогиба и его производных до третьего порядка при $t \rightarrow \infty$. Приравнивание нулю коэффициентов при e^{nt} и $e^{(n-2)t}$ приводит к двум уравнениям для определения указанных постоянных; из них находим:

$$w''_n(0) = \frac{Q_0 \rho^n}{2\pi N} (1 - \rho^2), \quad w'''_n(0) = -\frac{Q_0 \rho^n}{2\pi N} [n + 4 - (n + 2)\rho^2].$$

Подстановка этих значений в предыдущее соотношение приводит к формуле:

$$w_n(r) = \frac{Q_0}{8\pi N} \left\{ \left[\frac{\rho^2}{n(n-1)} - \frac{r^2}{n(n+1)} \right] \left(\frac{r}{\rho} \right)^n + \frac{\rho^2 + r^2}{n} (r\rho)^n - \frac{(r\rho)^{n+2}}{n+1} - \frac{(r\rho)^n}{n-1} \right\}, \quad (3.158)$$

при $r < \rho$. При $t < \tau$, т. е. $r > \rho$, начальная функция для изображения $W(p)$ будет отличаться от (157) отсутствием первой строки. Подставляя значения $w_n''(0)$ и $w_n'''(0)$, получаем при $r > \rho$:

$$w_n(r) = \frac{Q_0}{8\pi N} \left\{ \left[\frac{r^2}{n(n-1)} - \frac{\rho^2}{n(n-1)} \right] \left(\frac{\rho}{r} \right)^n + \frac{\rho^2 + r^2}{2} (r\rho)^n - \frac{(r\rho)^{n+2}}{n+1} - \frac{(r\rho)^n}{n-1} \right\}. \quad (3.159)$$

Нужно ещё определить $w_1(r)$. Проще всего это сделать, раскрыв неопределённость, содержащуюся в (158):

$$\lim_{n \rightarrow 1} \left[\frac{r^2}{n(n-1)} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n - \frac{(r\rho)^n}{n-1} \right] = -r\rho - 2r\rho \ln \rho.$$

Получаем при $r < \rho$:

$$w_1(r) = \frac{Q_0}{8\pi N} \left[-r\rho + (\rho^2 + r^2) r\rho - \frac{1}{2} (r\rho)^3 - \frac{1}{2} \frac{r^3}{\rho} - 2r\rho \ln \rho \right] \quad (3.160)$$

и при $r > \rho$:

$$w_1(r) = \frac{Q_0}{8\pi N} \left[-r\rho + (\rho^2 + r^2) r\rho - \frac{1}{2} (r\rho)^3 - \frac{1}{2} \frac{\rho^3}{r} - 2r\rho \ln r \right]. \quad (3.161)$$

Остаётся заметить, что в выражении (150) для $w_0(r)$ нужно ещё заменить ρS на $\frac{Q_0}{2\pi}$:

$$w_0(r) = \frac{Q_0}{8\pi N} \left[\frac{1}{2} (1 - r^2) (1 + \rho^2) + W(r, \rho) \right], \quad (3.162)$$

где $W(r, \rho)$ определено по (151).

После подстановки этих выражений в (153) получаем:

$$w(r, \varphi) = \frac{Q_0}{8\pi N} \left[\frac{1}{2} (1 - r^2) (1 + \rho^2) + \right. \\ \left. + (\rho^2 + r^2) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r\rho)^n}{n} \cos n\varphi - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r\rho)^{n+2}}{n+1} \cos n\varphi - \right. \\ \left. - r\rho \cos \varphi - \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(r\rho)^n}{n-1} \cos n\varphi + v(r, \rho; \varphi) \right], \quad (3.163)$$

где принято обозначение

$$v(r, \rho; \varphi) = W(r, \rho) + v^*(r, \rho; \varphi)$$

и при $r < \rho$:

$$v^*(r, \rho; \varphi) = -2r\rho \ln \rho \cdot \cos \varphi - \\ - r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n \frac{\cos n\varphi}{n(n+1)} + \rho^2 \sum_{n=2}^{\infty} \frac{\cos n\varphi}{n(n-1)} \left(\frac{r}{\rho} \right)^n$$

и, далее, при $r > \rho$:

$$v^*(r, \rho; \varphi) = -2r\rho \ln r \cdot \cos \varphi - \\ - \rho^2 \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \frac{\cos n\varphi}{n(n+1)} + r^2 \sum_{n=2}^{\infty} \left(\frac{\rho}{r} \right)^n \frac{\cos n\varphi}{n(n-1)}.$$

Полученные ряды можно просуммировать. Для этого вос-

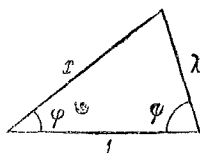


Рис. 30.

пользуемся хорошо известными рядами (рис. 30):

$$\ln \lambda = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos n\varphi}{n}, \quad \psi = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin n\varphi}{n}.$$

Например, из рис. 31 имеем

$$(\bar{R}\rho)^2 = (r\rho)^2 - 2r\rho \cos \varphi + 1 = \lambda^2$$

и, следовательно:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r\rho)^n}{n} \cos n\varphi = -\ln \bar{R}\rho.$$

Точно так же найдём:

$$\begin{aligned} \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(r\rho)^n}{n-1} \cos n\varphi &= r\rho \cos \varphi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(r\rho)^{n-1}}{n-1} \cos (n-1)\varphi - \\ &- r\rho \sin \varphi \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(r\rho)^{n-1}}{n-1} \sin (n-1)\varphi = -r\rho \cos \varphi \ln \bar{R}\rho - r\rho \bar{\psi} \sin \varphi \end{aligned}$$

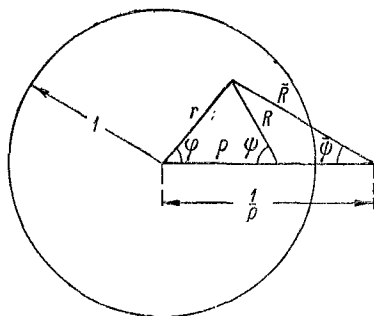


Рис. 31.

и т. д. Прodelав все эти вычисления, получим:

$$w(r, \varphi) = \frac{Q}{16\pi N} \left[R^2 \ln \frac{R^2}{(\rho \bar{R})^2} + (1 - \rho^2)(1 - r^2) \right]. \quad (3.164)$$

Таково выражение прогиба плиты с зашeмлённым краем, находящейся под действием сосредоточенной силы,

Этот результат хорошо известен; здесь он получен прямым, хотя и довольно утомительным вычислением, тогда как обычно его находят с помощью более тонких соображений.

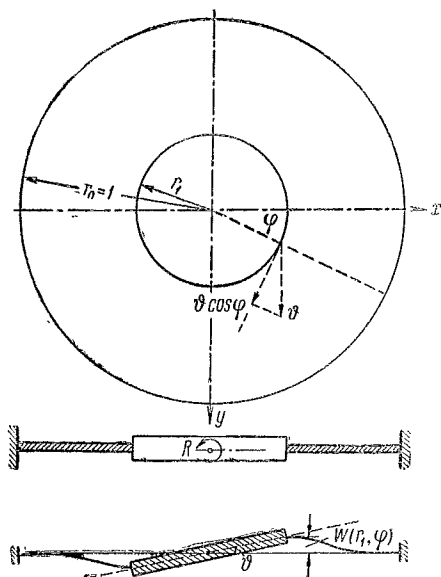


Рис. 32. Кольцевая круглая плита с заземлённым внешним краем и скреплённая по внутреннему краю с жёсткой шайбой.

Вместе с тем внутренний край плиты повернётся относительно касательной к окружности $r = r_1$, направленной в сторону возрастания φ , на угол $\vartheta \cos \varphi$; но этот поворот представляет как раз значение производной от w по r при $r = r_1$:

$$\left(\frac{dw}{dr}\right)_{r=r_1} = \vartheta \cos \varphi.$$

Итак, нужно разыскать перемещение точек плиты:

$$\omega(r, \varphi) = \tilde{w}_1(r) \cos \varphi = w_1(t) \cos \varphi,$$

3°. Дадим ещё пример расчёта кольцевой круглой плиты. Рассмотрим плиту, внешний край ($r = r_0 = 1$) которой заделан неподвижно, а внутренний край ($r = r_1 < 1$) также заделан в абсолютно жёсткую шайбу (рис. 32). К последней приложен внешний момент R (относительно оси y), сообщаящий ей поворот на угол ϑ . Край шайбы, а следовательно внутренний край рассматриваемой плиты, при этом получит перемещение в направлении, перпендикулярном плоскости плиты, равное $w(r_1, \varphi) = x\vartheta = r_1\vartheta \cos \varphi$.

где w_1 удовлетворяет дифференциальному уравнению (155) при $n = 1$:

$$w_1^{IV} + 4w_1''' + 2w_1'' - 4w_1' - 3w_1 = 0, \quad (3.165)$$

и краевым условиям:

$$\begin{aligned} w_1(0) = 0, \quad w_1'(0) = 0, \quad w_1(t_1) = \\ = \vartheta e^{-t_1}, \quad w_1'(t_1) = -\vartheta e^{-t_1}. \end{aligned} \quad (3.166)$$

Составляем изображающее уравнение; из него получим:

$$\begin{aligned} W_1(p) = w_1''(0) \frac{p^2 + 4p}{\Pi_1(p)} + w_1'''(0) \frac{p}{\Pi_1(p)}, \\ \Pi_1(p) = p^4 + 4p^3 + 2p^2 - 4p - 3 = (p-1)(p+1)^2(p+3), \end{aligned}$$

откуда по теореме разложения находим (см. § 4) начальную функцию:

$$\begin{aligned} w_1(t) = \frac{w_1''(0)}{16} (5e^t - 12te^{-t} - 4e^{-t} - e^{-3t}) + \\ + \frac{w_1'''(0)}{16} (e^t - 4te^{-t} - e^{-3t}). \end{aligned}$$

Остаётся удовлетворить второй группе краевых условий (при $t = t_1$). Это вполне элементарное вычисление довольно громоздко; поэтому приводим только окончательное выражение для прогиба (вернувшись к старому переменному r):

$$\frac{1}{\vartheta} \tilde{w}_1(r) = \gamma_1 r + \gamma_2 r^3 + \gamma_3 \frac{1}{r} + \gamma_4 r \ln r, \quad (3.167)$$

где обозначено:

$$\left. \begin{aligned} \gamma_1 &= \frac{1}{2} \frac{1 - r_1^2}{1 - r_1^2 + (1 + r_1^2) \ln r_1}, \\ \gamma_2 &= -\frac{1}{2} \frac{1}{1 - r_1^2 + (1 + r_1^2) \ln r_1}, \\ \gamma_3 &= -\gamma_1 - \gamma_2, \quad \gamma_4 = -2\gamma_1 - 4\gamma_2. \end{aligned} \right\} \quad (3.168)$$

Призодим табличку числовых значений этих величин:¹

r_1	γ_1	γ_2	γ_3	γ_4
0,5	— 3,225	4,30	— 1,075	— 10,750
0,6	— 5,824	9,10	— 3,276	— 24,752
0,7	— 11,577	22,70	— 11,123	— 67,646
0,8	— 30,024	83,40	— 53,376	— 273,552

Определение изгибающих и крутящих моментов и перерезывающих сил теперь делается по формулам, известным из теории плит. Зная их, можно также определить внешний момент R , производящий заданный поворот плиты; он окажется равным:

$$R = -4\pi N\gamma_4\vartheta. \quad (3.169)$$

4°. Переходим к рассмотрению задач, относящихся к изгибу прямоугольных плит. Мы будем рассматривать случай плиты, два параллельных края которой $y=0$ и $y=b$ опёрты; можно удовлетворить граничным условиям

$$w(0) = 0, \quad \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad (3.170)$$

на этих краях, если выражение прогиба $w(x, y)$ представить в виде тригонометрического ряда по синусам:

$$w(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} w_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.171)$$

Нагрузку $q(x, y)$ на единицу площади плиты также представим в форме такого же ряда:

$$q(x, y) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n(x) \sin \frac{n\pi y}{b}. \quad (3.172)$$

¹ H. Reissner, Über die unsymmetrische Biegung dünner Kreisplatten; Ingenieur Archiv, Bd. I, 1929, стр. 72—83.

Из уравнения изгиба плиты (139) следует, что $w_n(x)$ должно быть определено из дифференциального уравнения

$$w_n^{IV}(x) - 2\beta_n^2 w_n''(x) + \beta_n^4 w_n(x) = \frac{1}{N} q_n(x), \quad (3.173)$$

где для краткости написано $\beta_n = \frac{\pi n}{b}$.

Изображение этого уравнения будет:

$$(p^2 - \beta_n^2)^2 W_n(p) = \frac{Q_n(p)}{N} + p^2 (p^2 - \beta_n^2) w_n(0) + \\ + p (p^2 - 2\beta_n^2) w_n'(0) + p^2 w_n''(0) + p w_n'''(0). \quad (3.174)$$

Две из четырёх постоянных $w_n(0), \dots, w_n'''(0)$ определяются из условий закрепления края $x=0$. Например, для опёртого края:

$$w_n(0) = 0, \quad w_n''(0) = 0;$$

для заделанного края:

$$w_n(0) = 0, \quad w_n'(0) = 0;$$

наконец, для свободного края:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \frac{1}{m} \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0, \quad \frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + \frac{2m-1}{m} \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0,$$

что приводит к условиям (при $x=0$)

$$w_n''(0) = \frac{1}{m} \beta_n^2 w_n(0), \quad w_n'''(0) = \frac{2m-1}{m} \beta_n^2 w_n'(0).$$

Две остающихся постоянных определяются из условий на крае $x=a$.

Для построения начальных функций по полученным здесь изображениям исходим из формул

$$\frac{2\beta_n p^2}{(p^2 - \beta_n^2)^2} \rightarrow x \operatorname{sh} \beta_n x, \quad \frac{p(p^2 + \beta_n^2)}{(p^2 - \beta_n^2)^2} \rightarrow x \operatorname{ch} \beta_n x,$$

легко получающихся, если продифференцировать по параметру β_n известные изображения гиперболического косинуса и синуса.

Преобразуя вторую из приведённых выше формул, имеем:

$$\frac{p(p^2 + \beta_n^2)}{(p^2 - \beta_n^2)^2} = \frac{p}{p^2 - \beta_n^2} + \frac{2\beta_n^2 p}{(p^2 - \beta_n^2)^2} \rightarrow x \operatorname{ch} \beta_n x$$

и, следовательно:

$$\frac{p}{(p^2 - \beta_n^2)^2} \rightarrow \frac{1}{2\beta_n^3} (\beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x - \operatorname{sh} \beta_n x).$$

Теперь получаем:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2(p^2 - 2\beta_n^2)}{(p^2 - \beta_n^2)^3} &= \frac{p^2}{p^2 - \beta_n^2} - \frac{\beta_n^2 p^2}{(p^2 - \beta_n^2)^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2} (2 \operatorname{ch} \beta_n x - \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x); \\ \frac{p(p^2 - 2\beta_n^2)}{(p^2 - \beta_n^2)^3} &= \frac{p}{p^2 - \beta_n^2} - \frac{\beta_n^2 p}{(p^2 - \beta_n^2)^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{1}{2\beta_n} (3 \operatorname{sh} \beta_n x - \beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x). \end{aligned} \right\} \quad (3.175)$$

5°. Для фактического вычисления по (175) необходимо уметь представить нагрузку $q(x, y)$ в форме ряда по синусам вида (172). Нетрудно проверить, что функция, определяемая этим рядом, удовлетворяет условию

$$q(x, y) = -q(x, 2b - y) \quad (3.176)$$

и имеет период $2b$. Поэтому для получения искомого тригонометрического разложения нужно по (1.97) построить изображение $Q^*(x, s)$ функции $q^*(x, y)$, которая при $0 < y < b$ равна $q(x, y)$, при $b < y < 2b$ определяется по (176) и равна нулю при $y > b$. Тогда

$$Q(x, s) = \frac{Q^*(x, s)}{1 - e^{-2bs}}$$

будет изображением функции, разложение которой в тригонометрический ряд имеет вид (172) и которая при $0 < y < b$ совпадает с $q(x, y)$. Коэффициенты ряда (172) после этого найдутся по второй теореме разложения в её обобщённой форме (см. п. 11° § 5).

Рассмотрим, в частности, случай нагрузки $q(x, y)$, распределённой по прямой $y = \eta$. Имеем:

$$q^*(x, y) = \begin{cases} 0 & 0 < y < \eta - \varepsilon \\ q(x) & \eta - \varepsilon < y < \eta \\ 0 & \eta < y < 2b - \eta \\ -q(x) & 2b - \eta < y < 2b - \eta + \varepsilon \\ 0 & 2b - \eta + \varepsilon < y \end{cases}$$

или, пользуясь единичной функцией $\sigma_0(y)$:

$$q^*(x, y) = q(x) \{ [\sigma_0(y - \eta + \varepsilon) - \sigma_0(y - \eta)] - [\sigma_0(y - 2b + \eta) - \sigma_0(y - 2b + \eta - \varepsilon)] \}.$$

Полагая теперь, что $\varepsilon \rightarrow 0$, но так, что $\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} q(x) \varepsilon$ остаётся конечным и равным интенсивности нагрузки $r(x)$, распределённой по прямой $y = \eta$, и вспоминая, что по определению § 6

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\sigma_0(y - \eta + \varepsilon) - \sigma_0(y - \eta)}{\varepsilon} = \sigma_1(y - \eta),$$

получаем:

$$q^*(x, y) = r(x) [\sigma_1(y - \eta) - \sigma_1(y - 2b + \eta)] \leftarrow \div \leftarrow \div r(x) [e^{-s\eta} - e^{-s(2b-\eta)}] s$$

и, следовательно:

$$Q(x, s) = r(x) \frac{s[e^{-s\eta} - e^{-s(2b-\eta)}]}{1 - e^{-2bs}} = r(x) F(s).$$

Остаётся применить вторую теорему разложения к функции $F(s)$. Свободный член в ней отсутствует; корни знаменателя равны $\pm \frac{\pi n i}{b}$, где $n = 1, 2, \dots$. Поэтому:

$$\begin{aligned} F(s) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2b} \left\{ \left[e^{-\frac{n\pi i \eta}{b}} - e^{-\frac{(2b-\eta)n\pi i}{b}} \right] \frac{s}{s - \frac{n\pi i}{b}} - \right. \\ &\quad \left. - \left[e^{\frac{n\pi i}{b} \eta} - e^{\frac{(2b-\eta)n\pi i}{b}} \right] \frac{s}{s + \frac{n\pi i}{b}} \right\} = \\ &= \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{s \frac{n\pi}{b}}{s^2 + \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \rightarrow \frac{2}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \sin \frac{n\pi y}{b}. \end{aligned}$$

Итак, для нагрузки $q(x, y)$, распределённой по прямой $y = \eta$ с интенсивностью $r(x)$, представление в форме ряда (172) будет:

$$q(x, y) = \frac{2r(x)}{b} \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi y}{b} \sin \frac{n\pi \eta}{b} \quad (3.177)$$

и, значит:

$$q_n(x) = \frac{2}{b} r(x) \sin \beta_n \eta. \quad (3.178)$$

Ряд (177) — расходящийся, но им можно пользоваться подобно тому, как мы пользуемся импульсивными функциями: предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$ можно было бы сделать в результатах решения задачи, тогда мы имели бы в ходе вычислений дело со сходящимися рядами, но само вычисление было бы без нужды усложнено.

6°. Рассмотрим, например, случай бесконечной полосы (рис. 33) $0 \leq y \leq b$, опёртой по краям $y = 0$, $y = b$

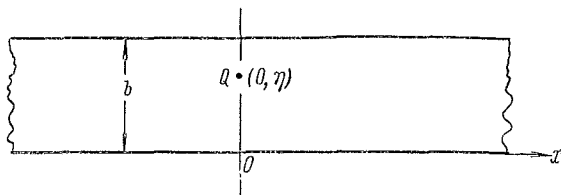


Рис. 33. Изгиб полосы сосредоточенной силой.

и нагруженной сосредоточенной силой Q в точке $x = 0$, $y = \eta$. Вследствие симметрии $w'_n(0) = 0$ и $w'''_n(0) = 0$, и можно рассматривать только правую часть полосы, относя к ней силу $\frac{1}{2} Q$.

Мы можем написать теперь:

$$r(x) = \frac{1}{2} Q \sigma_1(x) \leftarrow \div \frac{1}{2} Q \rho,$$

$$q_n(x) \leftarrow \div \frac{1}{b} Q \rho \sin \beta_n \eta$$

и по (174) получаем

$$\begin{aligned} W_n(p) = & \frac{Q}{bN} \sin \beta_n \eta \frac{p}{(p^2 - \beta_n^2)^2} + w_n(0) \frac{p^4 - 2\beta_n^2 p^2}{(p^2 - \beta_n^2)^2} + \\ & + w_n''(0) \frac{p^2}{(p^2 - \beta_n^2)^2} \rightarrow \frac{Q \sin \beta_n \eta}{2b\beta_n^3 N} (\beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x - \operatorname{sh} \beta_n x) + \\ & + \frac{1}{2} w_n(0) (2 \operatorname{ch} \beta_n x - \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x) + \frac{1}{2\beta_n^3} w_n''(0) \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x. \end{aligned}$$

Постоянные $w_n(0)$, $w_n''(0)$ нужно определить из условия обращения $w_n(x)$ в нуль при $x \rightarrow \infty$; для этого следует приравнять нулю коэффициенты при $e^{\beta_n x}$ и $\beta_n x e^{\beta_n x}$ в полученном выражении. Тогда находим:

$$w_n(0) = -\frac{1}{\beta_n^3} w_n''(0) = \frac{Q}{2bN\beta_n^3} \sin \beta_n \eta$$

и подстановка даёт:

$$w_n(x) = \frac{Q \sin \beta_n \eta}{2bN\beta_n^3} e^{-\beta_n x} (1 + \beta_n x);$$

следовательно:

$$w(x, y) = \frac{Qb^2}{2\pi^3 N} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^3} e^{-\beta_n x} (1 + \beta_n x) \sin \beta_n y \sin \beta_n \eta. \quad (3.179)$$

7°. Рассмотрим задачу об изгибе бесконечной полосы с опёртыми краями $y=0$, $y=b$ бесконечным рядом сосредоточенных сил в точках, находящихся на расстоянии $2l$ одна от другой и на расстоянии $\frac{b}{2}$ от опёртых краёв полосы. На рис. 34 эти точки названы $\dots, -1, 0, 1, \dots$. Вследствие симметрии вдоль прямых OO , делящих пополам отрезки между точками приложения сил, должно быть $w'_n = 0$, $w'''_n = 0$. Можно ограничиться рассмотрением прямоугольника $ABCD$; начало координат поместим в точке A ; тогда $w'_n(0) = w'''_n(0) = 0$; координаты точек приложения силы будут: $x = (2k + 1)l$, $k = 0, \pm 1, \dots$, $y = \frac{b}{2}$.

Поэтому в рассматриваемом случае

$$r(x) = pQ [\sigma_1(x-l) + \sigma_1(x-3l) + \dots] \leftarrow \div p \frac{Qe^{-pl}}{1 - e^{-2pl}}$$

$$\sin \beta_n \eta = \sin \frac{n\pi}{2} = (-1)^{\frac{n-1}{2}}$$

и слагаемые, для которых n чётно, нужно отбросить. Получаем:

$$W(p) = \frac{2Q}{bN} (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{pe^{-pl}}{(1 - e^{-2pl})(p^2 - \beta_n^2)^2} +$$

$$+ w_n(0) \frac{p^4 - 2p^2\beta_n^2}{(p^2 - \beta_n^2)^2} + w_n''(0) \frac{p^2}{(p^2 - \beta_n^2)^2} = \frac{\Theta(p)}{1 - e^{-2pl}}. \quad (3.180)$$

Нужно найти периодическое решение этого уравнения, имеющее период $2l$. В соответствии с многократно применявшимся приёмом для этого определяем постоянные $w_n(0)$,

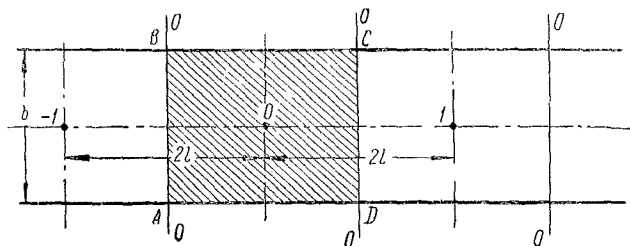


Рис. 34. Изгиб полосы бесконечным рядом сосредоточенных сил.

$w_n''(0)$ так, чтобы начальная функция $\vartheta(x) \leftarrow \div \Theta(p)$ при $x > 2l$ была тождественным нулем; тогда $\vartheta(x)$ при $0 < x < 2l$, т. е. в интересующей нас области будет давать искомые значения $w_n(x)$.

Имеем при $x > 2l$:

$$\begin{aligned} \vartheta(x) = & (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q}{bN\beta_n^3} [\beta_n(x-l) \operatorname{ch} \beta_n(x-l) - \operatorname{sh} \beta_n(x-l)] + \\ & + w_n(0) \{ [\operatorname{ch} \beta_n x - \operatorname{ch} \beta_n(x-2l)] - \\ & - \frac{1}{2} [\beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x - \beta_n(x-2l) \operatorname{sh} \beta_n(x-2l)] \} + \\ & + \frac{1}{2\beta_n^2} w_n''(0) [\beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x - \beta_n(x-2l) \operatorname{sh} \beta_n(x-2l)] \equiv 0. \end{aligned}$$

Нужно приравнять нулю коэффициенты при $\operatorname{ch} \beta_n x$, $\operatorname{sh} \beta_n x$, $\beta_n x \operatorname{ch} \beta_n x$, $\beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x$. Получаем четыре уравнения, содержащих два неизвестных $w_n(0)$ и $w_n''(0)$, но, как следовало ожидать, два из четырёх этих уравнений оказываются следствием остальных. Получаем

$$\left. \begin{aligned} w_n(0) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q}{bN\beta_n^3} \frac{\beta_n l \operatorname{ch} \beta_n l + \operatorname{sh} \beta_n l}{\operatorname{ch} 2\beta_n l - 1}; \\ w_n''(0) &= (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q}{bN\beta_n^3} \frac{\beta_n l \operatorname{ch} \beta_n l - \operatorname{sh} \beta_n l}{\operatorname{ch} 2\beta_n l + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.181)$$

Теперь можно построить начальную функцию для изображения (180). Достаточно это сделать для $0 < x < l$, так как по симметрии ясно, что $w_n(x) = w_n(2l - x)$.

Получаем при $0 < x < l$:

$$\begin{aligned} w_n(x) = & (-1)^{\frac{n-1}{2}} \frac{Q}{2bN\beta_n^3 \operatorname{sh}^2 \beta_n l} [\beta_n l \operatorname{ch} \beta_n l \operatorname{ch} \beta_n x + \\ & + \operatorname{sh} \beta_n l (\operatorname{ch} \beta_n x - \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x)] \end{aligned}$$

и, следовательно:

$$\begin{aligned} w(x, y) = & \frac{Qb^2}{2\pi^3 N} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{(-1)^{\frac{n-1}{2}}}{n^3 \operatorname{sh}^2 \beta_n l} \sin \beta_n y [\beta_n l \operatorname{ch} \beta_n l \operatorname{ch} \beta_n x + \\ & + \operatorname{sh} \beta_n l (\operatorname{ch} \beta_n x - \beta_n x \operatorname{sh} \beta_n x)]. \quad (3.182) \end{aligned}$$

Например, в точке приложения силы $(y = \frac{b}{2}, x = l)$ получаем значение прогиба:

$$w\left(l, \frac{b}{2}\right) = \frac{Qb^2}{4\pi^3 N} \sum_{n=1, 3, 5, \dots} \frac{2\beta_n l + \operatorname{sh} 2\beta_n l}{n^3 \operatorname{sh}^2 \beta_n l}.$$

§ 20. Деформация кругового кольца

Задача о деформации кругового кольца распадается на две независимых друг от друга задачи: плоская деформация кольца силами, лежащими в его плоскости, и неплоская деформация, создаваемая силами, действующими перпендикулярно плоскости кольца. Каждая из этих задач приводится к интегрированию системы шести дифференциальных уравнений первого порядка весьма простого вида; тем не менее фактическое доведение всех вычислений до конца сопряжено с кропотливыми выкладками, особенно при действии нагрузок, не описываемых единым аналитическим выражением по всей окружности кольца, в частности при действии сосредоточенных сил. Были предложены приёмы, упрощающие в некоторой мере ход вычисления,¹ но потребовавшие введения некоторых вспомогательных понятий, не требующихся по существу дела. Мы покажем здесь, что вполне эффектив-

ное решение можно получить естественным и прямым путём, применяя способ построения периодического решения системы линейных дифференциальных уравнений, изложенный в § 13.

1°. Плоская деформация кольца. Радиус кольца обозначим через a , систему подвижных координатных осей определим так: ось x направлена по радиусу кольца к его центру, ось z — по касательной к осевой

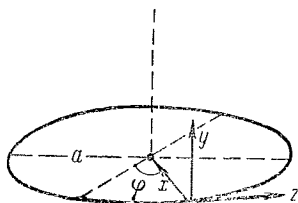


Рис. 35. К задаче деформации кольца. Подвижная система координатных осей xuz .

вой линии кольца в сторону возрастания угла φ , которым определяется положение рассматриваемого сечения; ось y

¹К. Б. Бицено и Р. Граммель, Техническая динамика. Гостехиздат, 1950, гл. V, § 2 и 3.

перпендикулярна плоскости zx , причём оси xuz образуют правую систему (рис. 35).

Уравнения равновесия элемента кольца, когда силы действуют в его плоскости, имеют вид

$$\dot{v}_x + v_z + af_x = 0, \quad \dot{v}_z - v_x + af_z = 0, \quad \dot{l}_y + av_x = 0. \quad (3.183)$$

Здесь точкой обозначено дифференцирование по углу φ ; v_x обозначает перерезывающую силу, v_z — растягивающую силу; l_y — изгибающий момент в сечении кольца относительно оси y , вызывающий изгиб кольца в его плоскости. Через f_x и f_z обозначены проекции на подвижные оси x и z внешней нагрузки, отнесенной к единице длины оси кольца. На рис. 36 показаны направления действий перерезывающей и растягивающей сил и изгибающего момента в сечении φ при положительных v_x , v_z , l_y .

По существу дела, f_x и f_z заданы для значений φ в интервале $(0, 2\pi)$. Ничто не мешает считать их периодическими функциями периода 2π .

Искомые решения для сил и момента, равно как и решения для величин, определяющих деформацию кольца, о которых речь будет ниже, также должны быть периодическими функциями φ периода 2π .

В соответствии с § 5 введём в рассмотрение функции $g_x(\varphi)$ и $g_z(\varphi)$, равные нулю при $\varphi > 2\pi$ и при $0 < \varphi < 2\pi$ совпадающие с функциями $f_x(\varphi)$ и $f_z(\varphi)$, определяющими закон изменения нагрузки на кольцо. Если

$$g_x(\varphi) \leftarrow \div G_x(p), \quad g_z(\varphi) \leftarrow \div G_z(p),$$

то по (1.97) изображения периодических функций $f_x(\varphi)$ и $f_z(\varphi)$ будут:

$$f_x(\varphi) \leftarrow \div \frac{G_x(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, \quad f_z(\varphi) \leftarrow \div \frac{G_z(p)}{1 - e^{-2\pi p}}. \quad (3.184)$$

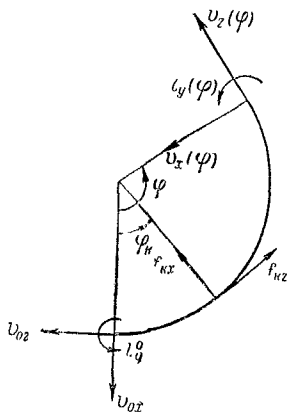


Рис. 36. Силы и моменты при плоской деформации кругового кольца

Рассмотрим некоторые частные случаи.

а. Кольцо вертикально, угол φ отсчитывается от нижней точки; нагрузка — собственный вес; получаем:

$$f_x(\varphi) = -\gamma \cos \varphi \leftarrow \div - \gamma \frac{p^2}{p^2 + 1},$$

$$f_z(\varphi) = -\gamma \sin \varphi \leftarrow \div - \gamma \frac{p}{p^2 + 1}$$

и, следовательно:

$$G_x(p) = \frac{-\gamma p^2 (1 - e^{-2\pi p})}{p^2 + 1}, \quad G_z(p) = \frac{-\gamma p (1 - e^{-2\pi p})}{p^2 + 1}, \quad (3.185)$$

где γ — вес единицы длины кольца.

б. Пусть $f(\varphi)$, т. е. $f_x(\varphi)$ или $f_z(\varphi)$, постоянно и равно q_0 ; имеем

$$G(\varphi) = q_0 (1 - e^{-2\pi p}).$$

в. Рассмотрим теперь случай, когда $f(\varphi)$ имеет постоянное значение q_0 для $\varphi_0 < \varphi < \varphi_1$ и равно нулю вне этого интервала; тогда

$$g(\varphi) = q_0 [\sigma_0(\varphi - \varphi_0) - \sigma_1(\varphi - \varphi_1)] \leftarrow \div q_0 (e^{-p\varphi_0} - e^{-p\varphi_1}). \quad (3.186)$$

г. Из предыдущего путём предельного перехода получается случай сосредоточенной силы f_0 в сечении φ_0 . Пусть нагрузка q_0 распределена по дуге $a\varepsilon$, так что $a\varepsilon q_0 = f_0$. Получаем

$$g(\varphi) = \frac{f_0}{a\varepsilon} [\sigma_0(\varphi - \varphi_0) - \sigma_0(\varphi - \varphi_0 - \varepsilon)].$$

Чтобы получить сосредоточенную силу, нужно совершить предельный переход $\varepsilon \rightarrow 0$. Получаем (§ 6):

$$g(\varphi) = \frac{f_0}{a} \sigma_1(\varphi - \varphi_0) \leftarrow \div \frac{f_0}{a} p e^{-p\varphi_0}. \quad (3.187)$$

д. Несколько более сложно определение функции нагрузки от сосредоточенного момента. Рассматриваем действие двух сосредоточенных сил: силы f_{0x} , действующей в сечении φ_0 , и ей равной и противоположно направленной силы, действующей в близком сечении $\varphi_0 + \varepsilon$ (рис. 37). Эта

система двух сил представляет пару с моментом, вращающим от оси x к оси z ; момент этой пары будет:

$$m_{0y} = -a\varepsilon f_{0x},$$

так как момент считается положительным, если создаваемое вращение направлено от z к x .

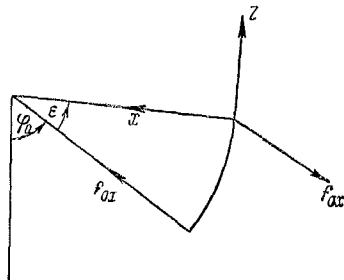


Рис. 37. К определению сосредоточенного момента.

Заметим теперь, что сила, действующая в сечении $\varphi_0 \pm \varepsilon$, даёт по осям x и z этого сечения составляющие

$$f_x = -f_{0x} = \frac{m_{0y}}{a\varepsilon}, \quad f_z = -f_{0z}\varepsilon = \frac{m_{0y}}{a}.$$

Поэтому по (187) нагрузку от рассматриваемых двух сил можно задать формулами:

$$g_x = \frac{f_{0x}}{a} [\sigma_1(\varphi - \varphi_0) - \sigma_1(\varphi - \varphi_0 - \varepsilon)] = \\ = -\frac{m_{0y}}{a^2} \cdot \frac{\sigma_1(\varphi - \varphi_0) - \sigma_1(\varphi - \varphi_0 - \varepsilon)}{\varepsilon},$$

$$g_z = -\frac{f_{0z}}{a} \varepsilon \sigma_1(\varphi - \varphi_0 - \varepsilon) = \frac{m_{0y}}{a^2} \sigma_1(\varphi - \varphi_0 - \varepsilon).$$

Перейдя к пределу ($\varepsilon \rightarrow 0$), получим:

$$G_x(p) = -\frac{m_{0y}}{a^2} p^2 e^{-p\varphi_0}, \quad G_z(p) = \frac{m_{0y}}{a^2} p e^{-p\varphi}. \quad (3.188)$$

2°. Переходим к интегрированию уравнений (183). Конечно, искомые решения можно получить, составив уравнения статики для конечного участка длины оси кольца;

но для сохранения единства метода прибегнем к операционному решению. Изображающая система для (183) будет:

$$\left. \begin{aligned} pV_x(p) + V_z(p) &= pv_x^0 - a \frac{G_x(p)}{1 - e^{-2\pi p}}; \\ -V_x(p) + pV_z(p) &= pv_z^0 - a \frac{G_z(p)}{1 - e^{-2\pi p}}; \\ L_y(p) &= pl_y^0 - aV_x(p), \end{aligned} \right\} \quad (3.189)$$

где v_x^0 , v_z^0 , l_y^0 — значения перерезывающей силы, растягивающей силы и изгибающего момента в сечении $\varphi = 0$ (рис. 36).

Решение изображающей системы, как это неоднократно делалось, запишем в форме:

$$\left. \begin{aligned} V_x(p) &= \frac{\Theta_1(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, & V_z(p) &= \frac{\Theta_2(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, \\ L_y(p) &= \frac{\Theta_3(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, \end{aligned} \right\} \quad (3.190)$$

где обозначено

$$\left. \begin{aligned} \Theta_1(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) \frac{v_x^0 p^3 - v_z^0 p}{p^2 + 1} - a \frac{pG_x(p) - G_z(p)}{p^2 + 1}; \\ \Theta_2(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) \frac{v_x^0 p + v_z^0 p^3}{p^2 + 1} - a \frac{G_x(p) + pG_z(p)}{p^2 + 1}; \\ \Theta_3(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) \left(l_y^0 + av_z^0 - a \frac{pv_x^0 + p^3 v_z^0}{p^2 + 1} \right) + \\ &\quad + a^2 \frac{G_x(p) + pG_z(p)}{p^2 + 1} - \frac{a^2 G_z(p)}{p}. \end{aligned} \right\} \quad (3.191)$$

Надо потребовать, чтобы начальные функции, соответствующие этим изображениям, обращались в нуль при $\varphi > 2\pi$. В дальнейшем будем писать:

$$\begin{aligned} G_x(p) &= \tilde{G}_x(p) + \frac{p}{a} \sum_{k=1}^n \left(f_{kx} - \frac{m_{ky}}{a} p \right) e^{-p\varphi_k}; \\ G_z(p) &= \tilde{G}_z(p) + \frac{p}{a} \sum_{k=1}^n \left(f_{kz} + \frac{m_{ky}}{a} \right) e^{-p\varphi_k}, \end{aligned} \quad (3.192)$$

где слагаемые $\tilde{G}_x(p)$ и $\tilde{G}_z(p)$ соответствуют изображениям непрерывно распределённых нагрузок $f_x(\varphi)$, $f_z(\varphi)$, а изображения, соответствующие сосредоточенным силам и моментам в сечениях $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_n$, выделены отдельно и составлены по (187) и (188).

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{pG_x(p) - G_z(p)}{p^2 + 1} &= \frac{p\tilde{G}_x(p) - \tilde{G}_z(p)}{p^2 + 1} + \\ &+ \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \left(\frac{p^2 f_{kx} - p f_{kz}}{p^2 + 1} - p \frac{m_{ky}}{a} \right) e^{-p\varphi_k}; \\ \frac{G_x(p) + pG_z(p)}{p^2 + 1} &= \frac{\tilde{G}_x(p) + p\tilde{G}_z(p)}{p^2 + 1} + \frac{1}{a} \sum_{k=1}^n \frac{p f_{kx} + p^2 f_{kz}}{p^2 + 1} e^{-p\varphi_k}. \end{aligned}$$

Заметим, что

$$pe^{-p\varphi_k} \rightarrow \sigma_1(\varphi - \varphi_k)$$

и, следовательно, при $\varphi \neq \varphi_k$ и, в частности, при $\varphi > 2\pi$

$$pe^{-p\varphi_k} \rightarrow 0.$$

Применив далее теоремы свёртывания и запаздывания, получим при $\varphi > 2\pi$:

$$\begin{aligned} \Theta_1(p) \rightarrow \vartheta_1(\varphi) &= v_x^0 [\cos \varphi - \cos(\varphi - 2\pi)] - v_z^0 [\sin \varphi - \\ &- \sin(\varphi - 2\pi)] - a \int_0^{2\pi} [f_x(\xi) \cos(\varphi - \xi) - f_z(\xi) \sin(\varphi - \xi)] d\xi - \\ &- \sum_{k=1}^n [f_{kx} \cos(\varphi - \varphi_k) - f_{kz} \sin(\varphi - \varphi_k)]. \end{aligned}$$

Слагаемые, содержащие v_x^0 и v_z^0 , конечно, пропадают, и условие обращения $\vartheta_1(\varphi)$ в нуль при $\varphi > 2\pi$ приводится к виду

$$\begin{aligned} a \int_0^{2\pi} [f_x(\xi) \cos(\varphi - \xi) - f_z(\xi) \sin(\varphi - \xi)] d\xi + \\ + \sum_{k=1}^n [f_{kx} \cos(\varphi - \varphi_k) - f_{kz} \sin(\varphi - \varphi_k)] = 0. \quad (3.193) \end{aligned}$$

Выражая условие обращения в нуль начальных функций

$$\vartheta_2(\varphi) \leftarrow \Theta_2(p), \quad \vartheta_3(\varphi) \leftarrow \Theta_3(p)$$

при $\varphi > 2\pi$, аналогично получим:¹

$$a \int_0^{2\pi} [f_w(\xi) \sin(\varphi - \xi) + f_z(\xi) \cos(\varphi - \xi)] d\xi + \\ + \sum_{k=1}^n [f_{kw} \sin(\varphi - \varphi_k) + f_{kz} \cos(\varphi - \varphi_k)] = 0; \quad (3.194)$$

$$a \int_0^{2\pi} f_z(\xi) d\xi + \sum_{k=1}^n \left(f_{kz} + \frac{m_{ky}}{a} \right) = 0. \quad (3.195)$$

Условия (193) и (194) должны выполняться тождественно при любом φ ; поэтому нужно приравнять нулю в этих выражениях коэффициенты при $\cos \varphi$ и $\sin \varphi$. Вместе со (195) получим три уравнения:

$$\left. \begin{aligned} a \int_0^{2\pi} (f_w \cos \xi + f_z \sin \xi) d\xi + \sum_{k=1}^n (f_{kw} \cos \varphi_k + \\ + f_{kz} \sin \varphi_k) &= 0; \\ a \int_0^{2\pi} (f_w \sin \xi - f_z \cos \xi) d\xi + \sum_{k=1}^n (f_{kw} \sin \varphi_k - \\ - f_{kz} \cos \varphi_k) &= 0; \\ a \int_0^{2\pi} f_z d\xi + \sum_{k=1}^n \left(f_{kz} + \frac{m_{ky}}{a} \right) &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.196)$$

Конечно, здесь получены уравнения равновесия кольца как твёрдого тела под действием внешних нагрузок.² Эти

¹ Приводимые ниже формулы можно было бы объединить в одной записи, пользуясь понятием „нагруженного“ интеграла (интеграла Стильтьеса).

² Реакции опор включаются в число внешних сосредоточенных сил и моментов.

уравнения, естественно, и служат условиями существования периодических решений уравнений (183).

Остаётся составить выражения $v_x(\varphi)$, $v_z(\varphi)$, $l_y(\varphi)$ по их изображениям (190) при $\varphi < 2\pi$. Находим:

$$\left. \begin{aligned} v_x(\varphi) &= v_x^0 \cos \varphi - v_z^0 \sin \varphi + v_x^*(\varphi), \\ v_z(\varphi) &= v_x^0 \sin \varphi + v_z^0 \cos \varphi + v_z^*(\varphi), \\ l_y(\varphi) &= l_y^0 + av_z^0 - av_x^0 \sin \varphi - av_z^0 \cos \varphi + l_y^*(\varphi), \end{aligned} \right\} \quad (3.197)$$

где слагаемые со звёздочками обозначают решения, соответствующие внешним нагрузкам. Каждое такое слагаемое состоит из двух частей: части, соответствующей непрерывно распределённой нагрузке, и части, происходящей от сосредоточенных сил и моментов.

Получаем:

а) для распределённых нагрузок:

$$\left. \begin{aligned} v_x^*(\varphi) &= -a \int_0^\varphi [f_x(\xi) \cos(\varphi - \xi) - f_z(\xi) \sin(\varphi - \xi)] d\xi; \\ v_z^*(\varphi) &= -a \int_0^\varphi [f_x(\xi) \sin(\varphi - \xi) + f_z(\xi) \cos(\varphi - \xi)] d\xi; \\ l_y^*(\varphi) &= a^2 \int_0^\varphi [f_x(\xi) \sin(\varphi - \xi) + f_z(\xi) \cos(\varphi - \xi)] d\xi - \\ &\quad - a^2 \int_0^\varphi f_z(\xi) d\xi; \end{aligned} \right\} \quad (3.198)$$

б) для сосредоточенных сил и моментов при $\varphi_{s-1} < \varphi < \varphi_s$, где $s = 2, 3, \dots, n+1$:

$$\left. \begin{aligned} v_x^*(\varphi) &= - \sum_{k=1}^{s-1} [f_{kx} \cos(\varphi - \varphi_k) - f_{kz} \sin(\varphi - \varphi_k)] + \\ &\quad + \frac{m_{s-1}}{a} \sigma_1(\varphi - \varphi_{s-1}); \\ v_z^*(\varphi) &= - \sum_{k=1}^{s-1} [f_{kx} \sin(\varphi - \varphi_k) + f_{kz} \cos(\varphi - \varphi_k)]; \end{aligned} \right\} \quad (3.199)$$

$$l_y^*(\varphi) = a \sum_{k=1}^{s-1} [f_{kx} \sin(\varphi - \varphi_k) + f_{kz} \cos(\varphi - \varphi_k)] - \left. \begin{aligned} & - a \sum_{k=1}^{s-1} \left(f_{kz} + \frac{1}{a} m_{ky} \right). \end{aligned} \right\} \quad (3.199)$$

При $\varphi < \varphi_1$ имеем:

$$v_x^*(\varphi) = v_z^*(\varphi) = l_y^*(\varphi) = 0.$$

Первое из выражений (199) показывает, что приложение сосредоточенного момента создаёт точечный бесконечный разрыв непрерывности значений перерезывающей силы v_w . Этот результат станет понятным, если вспомнить, что к понятию сосредоточенного момента мы пришли путём предельного перехода, полагая, что силы, составляющие пару, неограниченно возрастают. Никакого значения в дальнейшем указанное слабое в выражении $v_w(\varphi)$ не имеет.

Три произвольных постоянных v_x^0, v_z^0, l_y^0 , входящие в (197), не могут быть получены из рассмотренных уравнений статики; эти статически неопределимые лишние неизвестные *будут найдены из рассмотрения деформации кольца*.

3°. Обозначим через β угол поворота сечения кольца при деформации, через u, w — проекции перемещения точки на осевой линии кольца на оси x и z . Эти три величины в случае кольца с нерастяжимой осью, которое ниже рассматривается, связаны соотношениями

$$a\beta = \dot{u} + \dot{w}, \quad u - \dot{w} = 0. \quad (3.200)$$

К этим геометрическим соотношениям нужно присоединить формулу, связывающую изменение кривизны кольца $\dot{\beta}$ с изгибающим моментом

$$\dot{\beta} = \frac{1}{EI} l_y(\varphi), \quad (3.201)$$

где I — момент инерции поперечного сечения кольца относительно оси y .

Изображающая система для уравнений (200) будет

$$\begin{aligned} aB(p) &= p U(p) + W(p) - p u_0, \\ U(p) - p W(p) &= -p w_0. \end{aligned} \quad (3.202)$$

Из неё получаем:

$$\left. \begin{aligned} U(p) &= \frac{p^2 u_0 - p w_0}{p^2 + 1} + \alpha \frac{p B(p)}{p^2 + 1}; \\ W(p) &= \frac{p u_0 + p^2 w_0}{p^2 + 1} + \alpha \frac{B(p)}{p^2 + 1}. \end{aligned} \right\} \quad (3.203)$$

Из (201) имеем:

$$B(p) = \frac{\alpha L_y(p)}{pEI} + \beta_0 \quad \text{или} \quad B(p) = \frac{\Theta_4(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, \quad (3.204)$$

где по (191):

$$\begin{aligned} \Theta_4(p) = (1 - e^{-2\pi p}) \left[\beta_0 + \frac{\alpha}{pEI} (l_y^0 + \alpha v_z^0) - \frac{\alpha^2}{EI} \frac{v_x^0 + p v_z^0}{p^2 + 1} \right] + \\ + \frac{\alpha^3}{EI} \frac{G_x(p) + p G_z(p)}{p(p^2 + 1)}. \end{aligned}$$

При $\varphi > 2\pi$ соответствующая начальная функция должна быть тождественным нулём:

$$\begin{aligned} \Theta_4(\varphi) = \frac{2\pi\alpha}{EI} (l_y^0 + \alpha v_z^0) + \frac{\alpha^3}{EI} \int_0^{2\pi} \{ f_x(\xi) [1 - \cos(\varphi - \xi)] + \\ + f_z(\xi) \sin(\varphi - \xi) \} d\xi - \frac{\alpha^3}{EI} \int_0^{2\pi} (\varphi - \xi) f_z(\xi) d\xi + \\ + \frac{\alpha^2}{EI} \sum_{k=1}^n \{ f_{kx} [1 - \cos(\varphi - \varphi_k)] + f_{kz} \sin(\varphi - \varphi_k) \} - \\ - \frac{\alpha^2}{EI} \sum_{k=1}^n (\varphi - \varphi_k) \left(f_{kz} + \frac{m_{ky}}{\alpha} \right) \equiv 0. \end{aligned}$$

Используя (193)–(195), отсюда получаем первое соотношение для определения лишних неизвестных:

$$\begin{aligned} l_y^0 + \alpha v_z^0 = - \frac{\alpha^2}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_x(\xi) + \xi f_z(\xi)] d\xi - \\ - \frac{\alpha}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left[f_{kx} + \varphi_k \left(f_{kz} + \frac{m_{ky}}{\alpha} \right) \right]. \quad (3.205) \end{aligned}$$

Периодическое решение для $\beta(\varphi)$ по (204) при $0 < \varphi < 2\pi$ будет:

$$\beta(\varphi) = \beta_0 + \frac{a}{EI} (I_y^0 + a v_z^0) \varphi - \frac{a^2}{EI} [v_x^0 (1 - \cos \varphi) + v_z^0 \sin \varphi] + \beta^*(\varphi), \quad (3.206)$$

где слагаемое $\beta^*(\varphi)$, соответствующее нагрузкам, будет:

а) для распределённых нагрузок:

$$\beta^*(\varphi) = \frac{a^3}{EI} \int_0^\varphi \{f_x(\xi) [1 - \cos(\varphi - \xi)] - f_z(\xi) [\varphi - \xi - \sin(\varphi - \xi)]\} d\xi;$$

б) для сосредоточенных сил моментов при $\varphi_{s-1} \leq \varphi \leq \varphi_s$:

$$\begin{aligned} \beta^*(\varphi) = & \frac{a^2}{EI} \sum_{k=1}^{s-1} \{f_{kx} [1 - \cos(\varphi - \varphi_k)] + f_{kz} \sin(\varphi - \varphi_k)\} - \\ & - \frac{a^2}{EI} \sum_{k=1}^{s-1} \left(f_{kz} + \frac{m_{ky}}{a} \right) (\varphi - \varphi_k) \end{aligned}$$

и $\beta^*(\varphi) = 0$ при $\varphi \leq \varphi_1$.

Переходим к определению перемещений. Полагаем

$$U(p) = \frac{\Theta_5(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, \quad W(p) = \frac{\Theta_6(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, \quad (3.207)$$

где по (203) и (204):

$$\begin{aligned} \Theta_5(p) = & (1 - e^{-2\pi p}) \left[\frac{p^2 u_0 - p(w_0 - a\beta_0)}{p^2 + 1} + \frac{a^2}{EI} \frac{I_y^0 + a v_z^0}{p^2 + 1} - \right. \\ & \left. - \frac{a^3}{EI} \frac{p v_x^0 + p^2 v_z^0}{(p^2 + 1)^2} \right] + \frac{a^4}{EI} \frac{G_x(p) + p G_z(p)}{(p^2 + 1)^2} - \frac{a^4}{EI} \frac{G_z(p)}{p(p^2 + 1)}; \\ \Theta_6(p) = & (1 - e^{-2\pi p}) \left[\frac{p u_0 + p^2(w_0 - a\beta_0)}{p^2 + 1} + a\beta_0 + \frac{a^2}{EI} \frac{I_y^0 + a v_z^0}{p(p^2 + 1)} - \right. \\ & \left. - \frac{a^3}{EI} \frac{v_x^0 + p v_z^0}{(p^2 + 1)^2} \right] + \frac{a^4}{EI} \frac{G_x(p) + p G_z(p)}{p(p^2 + 1)^2} - \frac{a^4}{EI} \frac{G_z(p)}{p^2(p^2 + 1)}. \end{aligned}$$

Для проведения вычисления нужно использовать соотношения:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2}{(p^2+1)^2} &\rightarrow \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi, \quad \frac{p}{(p^2+1)^2} \rightarrow \frac{1}{2} (\sin \varphi - \varphi \cos \varphi), \\ \frac{1}{(p^2+1)^2} &\rightarrow 1 - \cos \varphi - \frac{1}{2} \varphi \sin \varphi. \end{aligned} \right\} \quad (3.208)$$

Нужно потребовать тождественного обращения в нуль начальных функций

$$\vartheta_5(\varphi) \leftarrow \Theta_5(p), \quad \vartheta_6(\varphi) \leftarrow \Theta_6(p)$$

для $\varphi > 2\pi$. Прделав вычисление, которое можно опустить, так как оно в значительной мере повторяет предшествующие выкладки, получим по использованию (205) и (193—195):

$$\begin{aligned} v_w^0 = & -\frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_w(\xi) \xi \cos \xi + f_z(\xi) (\xi \sin \xi + \cos \xi)] d\xi - \\ & -\frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left[f_{kw} \varphi_k \cos \varphi_k + f_{kz} (\varphi_k \sin \varphi_k + \cos \varphi_k) + \right. \\ & \left. + \frac{2m_{ky}}{a} \cos \varphi_k \right]; \quad (3.209) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} v_z^0 = & \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} [f_w(\xi) \xi \sin \xi - f_z(\xi) (\xi \cos \xi - \sin \xi)] d\xi + \\ & + \frac{1}{2\pi} \sum_{k=1}^n \left[f_{kw} \varphi_k \sin \varphi_k - f_{kz} (\varphi_k \cos \varphi_k - \sin \varphi_k) + \right. \\ & \left. + \frac{2m_{ky}}{a} \sin \varphi_k \right]. \quad (3.210) \end{aligned}$$

По (205), (209) и (210) определяются неизвестные силы и момент в сечении $\varphi = 0$.

Остаётся составить выражения $u(\varphi)$ и $w(\varphi)$ для $0 < \varphi \leq 2\pi$. По (207) получаем:

$$u(\varphi) = u_0 \cos \varphi - (w_0 - a\beta_0) \sin \varphi + \frac{a^2}{EI} (l_y^0 + av_z^0) (1 - \cos \varphi) + \\ + \frac{a^3}{2EI} [v_x^0 (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) - v_z^0 \varphi \sin \varphi] + u^*(\varphi); \quad (3.211)$$

$$w(\varphi) = u_0 \sin \varphi + (w_0 - a\beta_0) \cos \varphi + \frac{a^2}{EI} (l_y^0 + av_z^0) (\varphi - \sin \varphi) - \\ - \frac{a^3}{EI} [v_x^0 (2 - 2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) - v_z^0 (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)] + \\ + a\beta_0 + w^*(\varphi). \quad (3.212)$$

Для распределённой нагрузки имеем:

$$u^*(\varphi) = \frac{a^4}{2EI} \int_0^\varphi \{f_x(\xi) [\sin(\varphi - \xi) - (\varphi - \xi) \cos(\varphi - \xi)] + \\ + f_z(\xi) [(\varphi - \xi) \sin(\varphi - \xi) + 2 \cos(\varphi - \xi) - 2]\} d\xi; \\ w^*(\varphi) = \frac{a^4}{2EI} \int_0^\varphi \{f_x(\xi) [2 - 2 \cos(\varphi - \xi) - (\varphi - \xi) \sin(\varphi - \xi)] - \\ - f_z(\xi) [(\varphi - \xi) \cos(\varphi - \xi) + 2(\varphi - \xi) - 3 \sin(\varphi - \xi)]\} d\xi.$$

Для сосредоточенных сил и моментов при $\varphi_{s-1} \leq \varphi \leq \varphi_s$, где $s = 2, 3, \dots, n+1$, получаем:

$$u^*(\varphi) = \frac{a^3}{2EI} \sum_{k=1}^{s-1} \left\{ f_{kw} [\sin(\varphi - \varphi_k) - (\varphi - \varphi_k) \cos(\varphi - \varphi_k)] + \right. \\ \left. + f_{kz} [(\varphi - \varphi_k) \sin(\varphi - \varphi_k) + 2 \cos(\varphi - \varphi_k) - 2] - \right. \\ \left. - [2 - 2 \cos(\varphi - \varphi_k)] \right\} \frac{m_{ky}}{a}; \\ w^*(\varphi) = \frac{a^3}{2EI} \sum_{k=1}^{s-1} \left\{ f_{kw} [2 - 2 \cos(\varphi - \varphi_k) - (\varphi - \varphi_k) \sin(\varphi - \varphi_k)] - \right. \\ \left. - f_{kz} [(\varphi - \varphi_k) \cos(\varphi - \varphi_k) + 2(\varphi - \varphi_k) - 3 \sin(\varphi - \varphi_k)] - \right. \\ \left. - [2(\varphi - \varphi_k) - 2 \sin(\varphi - \varphi_k)] \right\} \frac{m_{ky}}{a}$$

и $u^*(\varphi) = 0$, $w^*(\varphi) = 0$ при $\varphi \leq \varphi_1$.

Полученные формулы решают задачу о плоской деформации кругового кольца. Они могут быть применены также к задаче о деформации части кругового кольца (круговой арки).

Через три постоянные u_0 , w_0 , β_0 , входящие в решение, выражается перемещение кольца как твёрдого тела (малые поступательное движение в поворот).

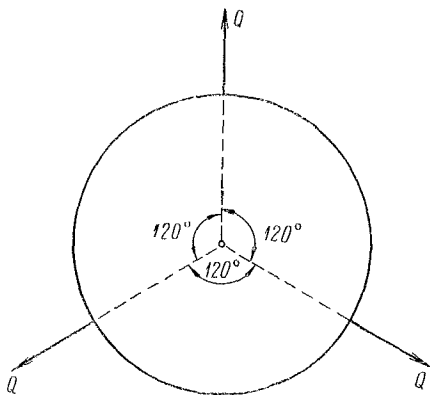


Рис. 38. Кольцо, нагруженное тремя одинаковыми силами, действующими в его плоскости под углами 120° .

Рассмотрим один простой пример. Круговое кольцо нагружено тремя одинаковыми силами Q , действующими под углами 120° (рис. 38). В этом случае:

$$\begin{aligned} f_{1x} &= f_{2x} = f_{3x} = -Q, \\ f_{1z} &= f_{2z} = f_{3z} = 0; \\ \varphi_1 &= \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{3} \end{aligned}$$

и по (205), (209), (210) находим:

$$l_y^0 + av_z^0 = \frac{3aQ}{2\pi}, \quad v_z^0 = Q \frac{\sqrt{3}}{3}, \quad v_w^0 = 0,$$

причём последний результат должен был получиться вследствие симметрии.

Найдём радиальное перемещение. Постоянные w_0 и β_0 положим равными нулю, постоянную u_0 выберем так, чтобы получить одинаковые перемещения в симметрично расположенных точках $\varphi = 0$ и $\varphi = \frac{2\pi}{3}$. При $\frac{\pi}{3} \leq \varphi \leq \frac{2\pi}{3}$ имеем:

$$u = u_0 \cos \varphi + \frac{Qa^3}{EI} \left[\frac{3}{2\pi} (1 - \cos \varphi) - \frac{\sqrt{3}}{6} \varphi \sin \varphi + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) \cos \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) - \frac{1}{2} \sin \left(\varphi - \frac{\pi}{3} \right) \right].$$

Подставляя $\varphi = \frac{2\pi}{3}$, найдём:

$$u_0 = \frac{Qa^3}{EI} \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{\pi}{18} - \frac{\sqrt{3}}{6} \right) \approx 0,013 \frac{Qa^3}{EI}.$$

Подставляя это значение в (211), найдём при $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{3}$ (этого достаточно, так как дальнейшие значения получаются по симметрии):

$$u(\varphi) = \frac{Qa^3}{EI} \left[\frac{3}{2\pi} - \left(\frac{\pi}{18} + \frac{\sqrt{3}}{6} \right) (1 - \cos \varphi) - \frac{\sqrt{3}}{6} \varphi \sin \varphi \right].$$

В частности, в точке приложения силы получаем:

$$u\left(\frac{\pi}{3}\right) = \frac{Qa^3}{EI} \left(\frac{3}{2\pi} - \frac{\pi}{9} - \frac{\sqrt{3}}{12} \right) \approx -0,018 \frac{Qa^3}{EI}.$$

4°. Неплоская деформация кругового кольца. Расположение осей возьмём то же, что и в первом случае (рис. 35); предположим, что кольцо нагружено сосредоточенными силами f_{ky} ($k = 1, 2, \dots, n$) в сечениях $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_k$ и равномерно распределённой нагрузкой интенсивности q . Рассмотрение сил, распределённых по любому закону, также не представит ничего нового.

Уравнения равновесия элемента кольца имеют вид:

$$\dot{v}_y + af_y = 0, \quad \dot{l}_w + l_z = av_y, \quad \dot{l}_z - l_w = 0, \quad (3.213)$$

где f_y — нагрузка на единицу длины осевой линии кольца; l_w, l_z — изгибающий и крутящий моменты; v_y — перерезывающая сила. Будем полагать

$$f_y(\varphi) \leftarrow F_y(p) = \frac{G_y(p)}{1 - e^{-2\pi p}} \quad (3.214)$$

и в соответствии со сказанным выше о действующих силах

$$g_y(\varphi) \leftarrow G_y(p) = q(1 - e^{-2\pi p}) + \frac{p}{\alpha} \sum_{k=1}^n f_{ky} e^{-p\varphi_k}. \quad (3.215)$$

Составляем изображающую систему уравнений для (213) и пишем её решение в виде:

$$\begin{aligned} V_y(p) &= \frac{\Theta_1(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, \quad L_w(p) = \frac{\Theta_2(p)}{1 - e^{-2\pi p}}, \\ L_z(p) &= \frac{\Theta_3(p)}{1 - e^{-2\pi p}}. \end{aligned} \quad (3.216)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \Theta_1(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) v_y^0 - \frac{aq}{p} - \sum_{k=1}^n f_{ky} e^{-p\varphi_k}; \\ \Theta_2(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) \left[\frac{p^2 l_w^0 - p(l_z^0 - av_y^0)}{p^2 + 1} - \frac{a^2 q}{p^2 + 1} \right] - \\ &\quad - \frac{ap}{p^2 + 1} \sum_{k=1}^n f_{ky} e^{-p\varphi_k}; \\ \Theta_3(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) \left[\frac{p^2 l_w^0 + p(l_z^0 - av_y^0)}{p^2 + 1} + av_y^0 - \frac{a^2 q}{p(p+1)} \right] - \\ &\quad - \frac{a}{p^2 + 1} \sum_{k=1}^n f_{ky} e^{-p\varphi_k}. \end{aligned}$$

Требования тождественного обращения в нуль при $\varphi > 2\pi$ начальных функций, соответствующих этим изображениям, приводят к трем уравнениям статики кольца как твёрдого тела, находящегося под действием внешних нагрузок, представляющих в данном случае систему параллельных сил.

Находим:

$$\left. \begin{aligned} 2\pi a q + \sum_{k=1}^n f_{ky} &= 0, & \sum_{k=1}^n f_{ky} \cos k\varphi &= 0, \\ \sum_{k=1}^n f_{ky} \sin k\varphi &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (3.217)$$

При соблюдении этих условий уравнения (213) имеют периодическое решение. Получаем при $0 < \varphi < 2\pi$ для $\varphi_{s-1} < \varphi < \varphi_s$:

$$\left. \begin{aligned} v_y &= v_y^0 - a q \varphi - \sum_{k=1}^{s-1} f_{ky}; \\ l_x &= l_x^0 \cos \varphi - (l_z^0 - a v_{0y}) \sin \varphi - \\ &\quad - a^2 q (1 - \cos \varphi) - a \sum_{k=1}^{s-1} f_{ky} \sin (\varphi - \varphi_k); \\ l_z &= l_z^0 \sin \varphi + (l_x^0 - a v_{0y}) \cos \varphi + a v_{cy} - \\ &\quad - a^2 q (\varphi - \sin \varphi) - a \sum_{k=1}^{s-1} f_{ky} [1 - \cos (\varphi - \varphi_k)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.218)$$

Три постоянных l_x^0 , l_z^0 , v_y^0 — изгибающий и крутящий моменты и перерезывающая сила в сечении $\varphi = 0$, конечно, не определяются из уравнений статики элемента кольца. Для определения этих лишних неизвестных *следует рассмотреть деформацию кольца*.

5°. Обозначим через v проекцию перемещения осевой линии кольца на ось y , через γ и α — углы поворота сечения кольца при деформации вокруг осей z и соответственно x . Имеют место геометрическая зависимость

$$\dot{v} = -\alpha \alpha \quad (3.219)$$

и два уравнения, связывающие изменения кривизны и кручения кольца с изгибающим и крутящим моментами:

$$\dot{\alpha} + \gamma = \frac{a l_x}{E I_x}, \quad \dot{\gamma} - \alpha = \frac{a l_z}{C}, \quad (3.220)$$

где I_x — момент инерции сечения относительно оси x , C — жёсткость при кручении.

Составив и решив соответствующую изображающую систему, представим, как мы всё время это делаем, результаты в форме:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\varphi) &\leftarrow \div A(p) = \frac{\Theta_4(p)}{1 - e^{-2\pi p}}; \\ \gamma(\varphi) &\leftarrow \div \Gamma(p) = \frac{\Theta_5(p)}{1 - e^{-2\pi p}}; \\ v(\varphi) &\leftarrow \div V(p) = \frac{\Theta_6(p)}{1 - e^{-2\pi p}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.221)$$

Здесь обозначено:

$$\begin{aligned} \Theta_4(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) \left[\frac{p^2 \alpha_0 - p \gamma_0}{p^2 + 1} + \frac{a l_x^0}{EI_x} \frac{p}{p^2 + 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2 v_y^0}{C} \frac{1}{p^2 + 1} - \frac{a^3 q}{EI_x} \frac{1}{p(p^2 + 1)} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a}{EI_x} + \frac{a}{C} \right) \frac{p l_x^0 + p^2 l_z^0}{(p^2 + 1)^2} + \left(\frac{a^3}{EI_x} + \frac{a^3}{C} \right) \frac{q}{p(p^2 + 1)^2} \right] - \\ &\quad - \frac{a^2}{EI_x} \sum_{k=1}^n \frac{f_{ky} e^{-p \varphi_k}}{p^2 + 1} + \left(\frac{a^2}{EI_x} + \frac{a^2}{C} \right) \sum_{k=1}^n \frac{f_{ky} e^{-p \varphi_k}}{(p^2 + 1)^2}; \\ \Theta_5(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) \left[\frac{p \alpha_0 + p^2 \gamma_0}{p^2 + 1} - \frac{a}{EI_x} \frac{(l_z^0 - a v_y^0) p}{p^2 + 1} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{a^2}{C} \frac{v_y^0 p}{p^2 + 1} + \left(\frac{a}{EI_x} + \frac{a}{C} \right) \frac{p^2 l_x^0 + p^3 (l_z^0 - a v_y^0)}{(p^2 + 1)^2} - \right. \\ &\quad \left. - \left(\frac{a^3}{EI_x} + \frac{a^3}{C} \right) \frac{q}{(p^2 + 1)^2} \right] - \\ &\quad - \left(\frac{a^2}{EI_x} + \frac{a^2}{C} \right) \frac{p}{(p^2 + 1)^2} \sum_{k=1}^n f_{ky} e^{-p \varphi_k}; \\ \Theta_6(p) &= (1 - e^{-2\pi p}) v_0 - \frac{a}{p} \Theta_4(p). \end{aligned}$$

Условия существования периодического решения уравнений (219), (220) приводят к требованию тождественного обращения в нуль начальных функций $\vartheta_i(\varphi)$ для $i = 4, 5, 6$, соответствующих написанным изображениям, при $\varphi > 2\pi$.

Опускаем вычисление, которое делается с помощью уже многократно применённых приёмов, и приводим результаты:

$$\left. \begin{aligned} l_x^0 &= -\frac{a}{2\pi} \left[2\pi a q - \sum_{k=1}^n f_{ky} \varphi_k \sin \varphi_k \right]; \\ l_z^0 - a v_y^0 &= \frac{a}{2\pi} \sum_{k=1}^n f_{ky} \varphi_k \cos \varphi_k; \\ v_y^0 &= -\pi a q - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^n \varphi_k f_{ky}. \end{aligned} \right\} \quad (3.222)$$

Эти уравнения определяют лишние статически неопределимые неизвестные.

Теперь остаётся составить выражения углов поворота α и γ и перемещения v ; для $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ находим:

$$\left. \begin{aligned} \alpha(\varphi) &= \alpha_0 \cos \varphi - \gamma_0 \sin \varphi + \frac{a l_x^0}{E I_x} \sin \varphi - \\ &\quad - \frac{a^3 v_y^0}{C} (1 - \cos \varphi) + \\ &\quad + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{E I_x} + \frac{a}{C} \right) [l_x^0 (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi) - \\ &\quad - (l_z^0 - a v_y^0) \varphi \sin \varphi] + \alpha^*(\varphi); \\ \gamma(\varphi) &= \alpha_0 \sin \varphi + \gamma_0 \cos \varphi - \frac{a (l_z^0 - a v_y^0)}{E I_x} \sin \varphi + \\ &\quad + \frac{a^3 v_y^0}{C} \sin \varphi + \frac{1}{2} \left(\frac{a}{E I_x} + \frac{a}{C} \right) [l_x^0 \varphi \sin \varphi - \\ &\quad - (l_z^0 - a v_y^0) (\varphi \cos \varphi + \sin \varphi)] + \gamma^*(\varphi); \\ v(\varphi) &= v_0 - a [\alpha_0 \sin \varphi - \gamma_0 (1 - \cos \varphi) - \\ &\quad - \frac{a^3 l_x^0}{E I_x} (1 - \cos \varphi) + \frac{a^3 v_y^0}{C} (\varphi - \sin \varphi) - \\ &\quad - \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{E I_x} + \frac{a^2}{C} \right) [l_x^0 (\varphi \sin \varphi - 2 + 2 \cos \varphi) + \\ &\quad + (l_z^0 - a v_y^0) (\varphi \cos \varphi - \sin \varphi)] + v^*(\varphi). \end{aligned} \right\} \quad (3.223)$$

Слагаемые, непосредственно определяемые по нагрузкам, будут:

$$\begin{aligned}\alpha^*(\varphi) = & -\frac{a^3 q}{EI_x} (\varphi - \sin \varphi) + \frac{1}{2} q \left(\frac{a^3}{EI_x} + \frac{a^3}{C} \right) (\varphi \cos \varphi + 2\varphi - \\ & - 3 \sin \varphi) - \frac{a^2}{EI_x} \sum_{k=1}^{s-1} f_{ky} [1 - \cos (\varphi - \varphi_k)] + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{EI_x} + \frac{a^2}{C} \right) \sum_{k=1}^{s-1} f_{ky} [2 - 2 \cos (\varphi - \varphi_k) - \\ & - (\varphi - \varphi_k) \sin (\varphi - \varphi_k)]; \\ \gamma^*(\varphi) = & -\frac{1}{2} q \left(\frac{a^3}{EI_x} + \frac{a^3}{C} \right) (2 - 2 \cos \varphi - \varphi \sin \varphi) + \\ & + \frac{1}{2} \left(\frac{a^2}{EI_x} + \frac{a^2}{C} \right) \sum_{k=1}^{s-1} f_{ky} [(\varphi - \varphi_k) \cos (\varphi - \varphi_k) - \sin (\varphi - \varphi_k)]; \\ v^*(\varphi) = & \frac{a^4 q}{EI_x} \left(\frac{\varphi^2}{2} - 1 + \cos \varphi \right) - \frac{a^4 q}{2} \left(\frac{1}{EI_x} + \frac{1}{C} \right) (\varphi \sin \varphi - 4 + \\ & + 4 \cos \varphi + \varphi^2) + \frac{a^3}{EI_x} \sum_{k=1}^{s-1} f_{ky} [(\varphi - \varphi_k) - \sin (\varphi - \varphi_k)] - \\ & - \frac{1}{2} \left(\frac{a^3}{EI_x} + \frac{a^3}{C} \right) \sum_{k=1}^{s-1} f_{ky} [(\varphi - \varphi_k) \cos (\varphi - \varphi_k) + 2 (\varphi - \varphi_k) - \\ & - 3 \sin (\varphi - \varphi_k)].\end{aligned}$$

Эти выражения имеют место при $\varphi_{s-1} \leq \varphi \leq \varphi_s$; при $\varphi \leq \varphi_1$ нужно отбросить слагаемые, соответствующие сосредоточенным силам. Полученные формулы дают полное решение задачи о неплоской деформации кругового кольца. Три произвольных постоянных α_0 , γ_0 , v_0 , входящие в решение, соответствуют перемещению кольца как твёрдого тела.

Общность полученных формул и метода их нахождения позволяют решать самые разнообразные задачи о неплоской деформации кольца; можно внести в эти решения некоторые дополнения, которые позволят также применить их к рассмотрению задачи о деформации части кругового кольца.

В качестве примера рассмотрим простейшую статически определимую (в смысле определения опорных реакций) задачу: горизонтальное кольцо на трёх точечных опорах, расположенных под углами 120° , несёт нагрузку q , равномерно распределённую по осевой линии кольца.

В формулы (222) нужно подставить

$$f_{1y} = f_{2y} = f_{3y} = -\frac{2\pi a q}{3}, \quad \varphi_1 = \frac{\pi}{3}, \quad \varphi_2 = \pi, \quad \varphi_3 = \frac{5\pi}{3};$$

получаем

$$l_x^0 = a^2 q \left(\frac{2\sqrt{3}\pi}{9} - 1 \right) = 0,21 a^2 q, \quad l_z^0 = v_y^0 = 0,$$

причём последний результат, конечно, объясняется симметрией расположения опор относительно выбранного начала отсчёта углов. Подстановка в (223) даёт теперь искомые выражения.

§ 21. Применение разностных уравнений к решению некоторых задач сопротивления материалов

1°. Задача Н. Е. Жуковского о распределении усилий на нарезках винта и гайки.¹ Возможны

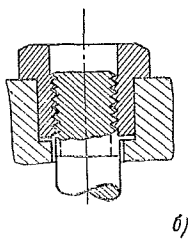
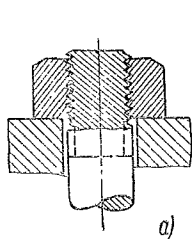


Рис. 39. Болт и гайка: а) болт растянут, гайка сжата; б) болт и гайка растянуты.

и гайка удерживается заплечиками. В этом случае растянуты и болт и гайка. К болту приложена растягивающая сила Q .

¹ Н. Е. Жуковский, Распределение давлений на нарезках винта и гайки. Сбор. соч., VIII, ОНТИ, 1937, стр. 48—50.

Требуется определить, как распределятся усилия по отдельным нарезкам.

Согласно Н. Е. Жуковскому, задачу сводят к расчётной схеме, показанной на рис. 40. Правый стержень на этой схеме изображает тело болта, левый — тело гайки. Выступы, в которых соприкасаются стержни, изображают нарезы болта и гайки. Нумеруем нарезы снизу вверх: (0), (1), ..., (n), а соответствующие поля между ними: 1, 2, ..., n. Искомые усилия на нарезках обозначим через $p_0, p_1, \dots, p_n$.

Рассмотрим сначала игру сил в болте. Растягивающее усилие, действующее в поле болта номер i , очевидно, будет

$$Q - (p_0 + p_1 + \dots + p_{i-1}) = s_i. \quad (3.224)$$

Под действием этого усилия i -ое поле болта увеличит первоначальную длину на $\delta_i = \frac{s_i h}{EF}$, где h — расстояние между двумя выступами, F — площадь поперечного сечения болта. Нарез болта номер i под действием силы p_i поднимется относительно тела болта на величину, пропорциональную этой силе $f_i = c p_i$, где коэффициент пропорциональности c зависит от геометрических размеров и формы нареза; он принимается одинаковым для всех нарезков.

Обозначим, далее, смещение (направленное вниз) тела болта, расположенного ниже всех нарезков, через δ_0 ; теперь нетрудно сообразить, что k -ый нарез сместится вниз всего на

$$\Delta_k = \delta_0 - \sum_{i=1}^k \delta_i - f_k = \delta_0 - \frac{h}{EF} \sum_{i=1}^k s_i - c p_k, \quad (3.225)$$

где $k = 1, 2, \dots, n$.

Переходим к рассмотрению гайки сначала для первого расположения (рис. 39a). Реакция неподвижного нижнего основания, очевидно, направлена вверх и равна Q . Поэтому сжимающее усилие в i -ом поле тела гайки будет, очевидно, $Q - (p_0 + p_1 + \dots + p_{i-1}) = s_i$ и это поле сократится на

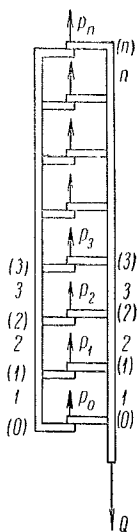


Рис. 40. Схема распределения усилий по нарезкам винта и гайки.

длину $\delta'_i = \frac{s_i h}{EF_1}$, где F_1 — площадь поперечного сечения гайки. Нарез гайки номер i опустится относительно тела гайки на величину $f'_i = c' p_i$.

Учитывая, что смещение нижнего основания гайки отсутствует, находим теперь, что смещение вниз k -го нареза гайки будет:

$$\Delta'_k = \sum_{i=1}^k \delta'_i + f'_k = \frac{h}{EF_1} \sum_{i=1}^k s_i + c' p_k,$$

где $k = 1, 2, \dots, n$. Но $\Delta_k = \Delta'_k$, откуда получается соотношение:

$$\delta_0 - \frac{h}{EF} \sum_{i=1}^k s_i - c p_k = \frac{h}{EF_1} \sum_{i=1}^k s_i + c' p_k$$

или

$$\delta_0 = \frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) \sum_{i=1}^k s_i + (c + c') p_k. \quad (3.226)$$

Заменяя в нём k на $k+1$, найдём:

$$\delta_0 = \frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) \sum_{i=1}^{k+1} s_i + (c + c') p_{k+1}.$$

Вычитая из этого соотношения предшествующее, найдём теперь:

$$\frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) s_{k+1} + (c + c') (p_{k+1} - p_k) = 0. \quad (3.227)$$

Заменяем здесь s_{k+1} его значением по (224), получим:

$$\frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) Q = \frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) \sum_{i=0}^k p_i - (c + c') (p_{k+1} - p_k).$$

Снова заменяем k на $k+1$, получаем:

$$\frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) Q = \frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) \sum_{i=0}^{k+1} p_i - (c + c') (p_{k+2} - p_{k+1}).$$

Из этого соотношения вычитаем предшествующее; находим

$$\frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) p_{k+1} - (c + c') (p_{k+2} - 2p_{k+1} + p_k) = 0.$$

Введём теперь обозначения:

$$\frac{h}{E(c + c')} \left(\frac{1}{F} + \frac{1}{F_1} \right) = \lambda, \quad 1 + \frac{\lambda}{2} = \operatorname{ch} \beta.$$

Задача приведена к разностному уравнению:

$$p_{k+2} - 2p_{k+1} \operatorname{ch} \beta + p_k = 0. \quad (3.228)$$

Переходим ко второму расположению (рис. 39 б). Реакция нижнего основания гайки теперь равна нулю; растягивающее усилие в i поле тела гайки будет:

$$p_0 + p_1 + \dots + p_{i-1} = s'_i = Q - s_i, \quad (3.229)$$

где s_i определено выше по (224). Это поле удлинится на величину $\delta''_i = \frac{hs'_i}{EF_1}$.

Как и в первом случае, нарез гайки номер i сместится вниз относительно её тела на $f'_i = c'p_i$; перемещение нижней поверхности гайки назовём Δ'_0 , считая его положительным, если оно направлено вниз. Общее перемещение k -го нареза гайки теперь будет:

$$\Delta''_k = \Delta_0 - \sum_{i=1}^k \delta''_i + f'_i = \Delta_0 - \frac{h}{EF_1} \sum_{i=1}^k s'_i + c'p_k.$$

Приравнявая это выражению (225) для Δ_k , получаем:

$$\delta_0 - \Delta_0 = \frac{h}{EF} \sum_{i=1}^k s_i - \frac{h}{EF_1} \sum_{i=1}^k s'_i + (c + c') p_k. \quad (3.230)$$

Заменим здесь k на $k+1$ и вычитаем (230) из получающегося соотношения. Находим

$$\frac{h}{EF} s_{k+1} - \frac{h}{EF_1} s'_{k+1} + (c + c') (p_{k+1} - p_k) = 0.$$

Заменяя теперь s'_{k+1} его значением по (229), получаем:

$$\left(\frac{h}{EF} + \frac{h}{EF_1}\right) s_{k+1} + (c + c') (p_{k+1} - p_k) = \frac{h}{EF_1} Q. \quad (3.231)$$

Это соотношение заменяет в рассматриваемом случае (227). Теперь с помощью того же приёма, что и в первом случае, получаем снова разностное уравнение (228).

Переходим к решению этого уравнения. Полагая¹

$$p_k \leftarrow \overset{*}{P}(r),$$

получим по (2.242):

$$\overset{*}{P}(r) (e^{2r} - 2 \operatorname{ch} \beta e^r + 1) = (e^r - 1) [p_0 (e^r - 2 \operatorname{ch} \beta) + p_1],$$

и по второй теореме разложения (2.237) найдём:

$$\begin{aligned} \overset{*}{P}(r) &= \frac{p_1 - p_0 e^{-\beta}}{2 \operatorname{sh} \beta} \frac{e^r - 1}{e^r - e^{\beta}} - \frac{p_1 - p_0 e^{\beta}}{2 \operatorname{sh} \beta} \frac{e^r - 1}{e^r - e^{-\beta}} \rightarrow \\ &\rightarrow \frac{p_1 - p_0 e^{-\beta}}{2 \operatorname{sh} \beta} e^{k\beta} - \frac{p_1 - p_0 e^{\beta}}{2 \operatorname{sh} \beta} e^{-k\beta}. \end{aligned}$$

Итак, получаем:

$$p_k = p_1 \frac{\operatorname{sh} k\beta}{\operatorname{sh} \beta} - p_0 \frac{\operatorname{sh} (k-1)\beta}{\operatorname{sh} \beta}, \quad (3.232)$$

откуда по формуле разности гиперболических синусов найдём

$$p_{k+1} - p_k = \frac{p_1 \operatorname{ch} \left(k + \frac{1}{2}\right) \beta - p_0 \operatorname{ch} \left(k - \frac{1}{2}\right) \beta}{\operatorname{ch} \frac{\beta}{2}}. \quad (3.233)$$

Переходим к определению постоянных p_0 , p_1 . Сначала рассмотрим первое расположение (рис. 39a). По (227) имеем:

$$\begin{aligned} s_{k+1} &= -\frac{1}{\lambda} (p_{k+1} - p_k) = \\ &= -\frac{1}{2 \operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}} \left[p_1 \operatorname{ch} \left(k + \frac{1}{2}\right) \beta - p_0 \operatorname{ch} \left(k - \frac{1}{2}\right) \beta \right]. \end{aligned}$$

¹ Чтобы не создавать путаницы в обозначениях, здесь вместо p пишем r ; через p (с индексами) обозначены искомые усилия на нарезках.

Выражая, что $s_{n+1} = 0$, найдём:

$$p_1 = p_0 \frac{\operatorname{ch}\left(n - \frac{1}{2}\right)\beta}{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}.$$

и подстановка в (232) после упрощений даёт:

$$p_k = p_0 \frac{\operatorname{ch}\left(n - k + \frac{1}{2}\right)\beta}{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}.$$

Остаётся найти p_0 . Возвращаясь к выражению s_{k+1} и подставляя в него значение p_1 , получаем

$$s_{k+1} = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}} p_0 \frac{\operatorname{sh}(n-k)\beta}{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}.$$

Замечая теперь, что

$$s_1 = Q - p_0 = \frac{1}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}} \cdot \frac{\operatorname{sh} n\beta}{\operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta} p_0,$$

получаем

$$Q = p_0 \left[1 + \frac{\operatorname{sh} n\beta}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta} \right] = p_0 \frac{\operatorname{sh}(n+1)\beta}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}$$

и, значит:

$$p_0 = \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch}\left(n + \frac{1}{2}\right)\beta}{\operatorname{sh}(n+1)\beta} Q.$$

Окончательно находим:

$$\begin{aligned} p_k &= 2Q \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \frac{\operatorname{ch}\left(n - k + \frac{1}{2}\right)\beta}{\operatorname{sh}(n+1)\beta} = \\ &= Q \frac{\operatorname{sh}(n-k+1)\beta - \operatorname{sh}(n-k)\beta}{\operatorname{sh}(n+1)\beta}. \quad (3.234) \end{aligned}$$

Переходим к рассмотрению второго расположения. По (231) имеем:

$$s_{k+1} = -\frac{1}{\lambda} (p_{k+1} - p_k) + \frac{F}{F + F_1} Q$$

и по (233):

$$s_{k+1} = \frac{F}{F+F_1} Q - \frac{p_1 \operatorname{ch} \left(k + \frac{1}{2}\right) \beta - p_0 \operatorname{ch} \left(k - \frac{1}{2}\right) \beta}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{sh} \beta}.$$

Требование обращения в нуль s_{n+1} приводит к соотношению

$$p_1 = p_0 \frac{\operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2}\right) \beta}{\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta} + \frac{2FQ}{F_1 + F} \cdot \frac{\operatorname{sh} \beta \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta}$$

и, значит,

$$p_k = p_0 \frac{\operatorname{ch} \left(n - k + \frac{1}{2}\right) \beta}{\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta} + \frac{2QF}{F_1 + F} \frac{\operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \cdot \operatorname{sh} k \beta}{\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta};$$

$$s_{k+1} = \frac{p_0}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}} \frac{\operatorname{sh} (n - k) \beta}{\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta} + \frac{QF}{F_1 + F} \left[1 - \frac{\operatorname{ch} \left(k + \frac{1}{2}\right) \beta}{\operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta} \right].$$

Выражая теперь, что $s_1 = Q - p_0$, получим:

$$p_0 = Q \frac{F_1}{F + F_1} \frac{2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \left(n + \frac{1}{2}\right) \beta}{\operatorname{sh} (n + 1) \beta} + Q \frac{F}{F_1 + F} \frac{\operatorname{sh} \beta}{\operatorname{sh} (n + 1) \beta}$$

и подстановка в выражение p_k даёт:

$$p_k = \frac{2Q \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{sh} (n + 1) \beta} \left[\frac{F_1}{F + F_1} \operatorname{ch} \left(n - k + \frac{1}{2}\right) \beta + \frac{F}{F + F_1} \operatorname{ch} \left(k + \frac{1}{2}\right) \beta \right]. \quad (3.235)$$

Рассмотрим частный случай $F_1 = F$. Тогда полученная формула приводится к виду:

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{Q \operatorname{sh} \frac{\beta}{2}}{\operatorname{sh} (n + 1) \beta} \left[\operatorname{ch} \left(n - k + \frac{1}{2}\right) \beta + \operatorname{ch} \left(k + \frac{1}{2}\right) \beta \right] = \\ &= \frac{Q \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \left(\frac{n}{2} - k\right) \beta}{\operatorname{sh} \frac{n + 1}{2} \beta}. \end{aligned}$$

Число витков, ранее обозначенное через $n+1$, теперь обозначим через $2n_1+2$. Тогда получим:

$$p_k = - \frac{Q \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \left(n_1 - k + \frac{1}{2} \right) \beta}{\operatorname{sh} (n_1 + 1) \beta}. \quad (3.236)$$

Полученная выше для первого расположения формула (234) отличается от этой множителем 2. Получается вполне естественный результат: при втором расположении и при удвоенном числе нарезов на каждый из наиболее нагруженных (крайних — верхний и нижний) нарезав приходится усилие вдвое меньшее, чем в первом расположении падало на наиболее нагруженный нижний нарез. Конечно, это строго верно лишь при $F_1 = F$.

Из (235) нетрудно заключить, что во втором расположении наиболее нагружены крайние (нижние и верхние) нарезав, усилия падают по мере приближения к середине сверху или снизу; в первом расположении усилие монотонно уменьшается по мере увеличения номера нарезав, т. е. кверху.

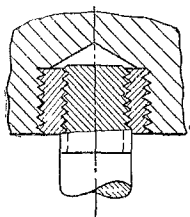


Рис. 41. Болтовое разъёмное соединение (гайка с внешней вырезкой).

рис. 41. Гайка снабжена внешней нарезкой, которой она ввёрнута в стенку из более податливого материала. Такие соединения применяют в машиностроении, чтобы избежать непосредственного воздействия болта на стенку.

В основу расчёта примем схему рис. 42, представляющую очевидное обобщение схемы Н. Е. Жуковского.

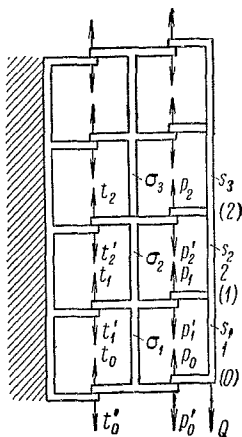


Рис. 42. Схема распределения усилий по нарезкам болта, гайки и стенки в случае болтового разъёмного соединения.

Как и выше, имеем выражение усилия в k -ом поле тела болта:

$$s_k = Q - \sum_{i=0}^{k-1} p_i. \quad (3.237)$$

Смещение вниз k -го нареза болта представится формулой (225):

$$\Delta_k = \delta_0 - \sum_{i=1}^k \delta_i - f_k = \delta_0 - \frac{h}{EF} \sum_{i=1}^k s_i - cp_k, \quad (3.238)$$

где приняты те же обозначения, что и в случае 1°.

Смещение вниз k -го правого (внутреннего) нареза гайки будет:

$$\Delta'_k = \Delta_0 - \sum_{i=1}^k \delta'_i + f'_k = \Delta_0 - \frac{h}{EF_1} \sum_{i=1}^k \sigma_i + c' p_k. \quad (3.239)$$

Здесь Δ_0 — смещение (вниз) нижней поверхности гайки, σ_i — усилие в i -ом поле гайки; из простых статических соображений следует, что

$$\sigma_k = \sum_{i=0}^{k-1} (p'_i - t_i) = \sum_{i=0}^{k-1} (p_i - t_i), \quad (3.240)$$

где t_i — усилие на i -ом левом (внешнем) нарезе гайки.

Из (238) и (239), замечая, что $\Delta_k = \Delta'_k$, получаем:

$$\delta_0 - \Delta_0 = \frac{h}{E} \left(\frac{1}{F} \sum_{i=1}^k s_i - \frac{1}{F_1} \sum_{i=1}^k \sigma_i \right) + (c + c') p_k.$$

Вычитая это уравнение из такого же уравнения, в котором k заменено на $(k+1)$, получаем:

$$\lambda_1 s_{k+1} - \lambda_2 \sigma_{k+1} + p_{k+1} - p_k = 0, \quad (3.241)$$

где для краткости введены обозначения

$$\lambda_1 = \frac{h}{EF(c+c')}, \quad \lambda_2 = \frac{h}{EF_1(c+c')}.$$

Написав теперь соотношение (241) для номера $(k+1)$ и вычитая из него (241), получим по (237) и (240) разностное уравнение:

$$p_{k+2} - (2 + \lambda_1 + \lambda_2) p_{k+1} + p_k + \lambda_2 t_{k+1} = 0, \quad (3.242)$$

содержащее две неизвестных функции целочисленного аргумента k (номера нареза). Второе разностное уравнение получим, составив условие равенства перемещений внешнего нареза гайки и нареза стенки, в которую гайка ввёрнута:

Перемещение вниз k -го левого нареза гайки будет:

$$\Delta_k'' = \Delta_0 - \sum_{i=1}^k \delta_i' - f_k'' = \Delta_0 - \frac{h}{EF_1} \sum_{i=1}^k \sigma_i - c'' t_k,$$

тогда как равное ему перемещение (вниз) соответствующего нареза стенки равно

$$\Delta_k''' = c''' t_k,$$

где c'' , c''' — коэффициенты, зависящие (как c и c') от формы размеров и материала соответствующих нарезков. Получаем:

$$\frac{h}{EF_1} \sum_{i=1}^k \sigma_i + (c'' + c''') t_k = 0.$$

Написав это соотношение для номера $k+1$, после вычитания получим:

$$\lambda_3 \sigma_{k+1} + t_{k+1} - t_k = 0, \quad (3.243)$$

где обозначено $\lambda_3 = \frac{h}{EF_1(c'' + c''')}$.

Снова повторив указанный выше приём, по (240) найдём:

$$\lambda_3 p_{k+1} + t_{k+2} - (2 + \lambda_3) t_{k+1} + t_k = 0. \quad (3.244)$$

Решение системы разностных уравнений (242) и (244) будет содержать четыре неопределённых постоянных p_0 , p_1 , t_0 , t_1 . Они определяются из краевых условий, которые нужно сформулировать следующим образом: из (241) и (244) имеем:

$$\left. \begin{aligned} \sigma_{k+1} &= \frac{1}{\lambda_3} (t_k - t_{k+1}), \\ s_{k+1} &= \frac{1}{\lambda_1} (p_k - p_{k+1}) + \frac{\lambda_2}{\lambda_1 \lambda_3} (t_k - t_{k+1}), \end{aligned} \right\} \quad (3.245)$$

и, значит, σ_{n+1} и s_{n+1} выразятся через указанные постоянные; уравнения для их нахождения будут:

$$\sigma_{n+1} = 0, \quad s_{n+1} = 0, \quad \sigma_1 = p_0 - t_0, \quad s_1 = Q - p_0. \quad (3.246)$$

Переходим к решению полученной системы разностных уравнений; изображающая система будет:

$$\left. \begin{aligned} \dot{P}^*(r) [e^{2r} - (2 + \lambda_1 + \lambda_2) e^r + 1] + \lambda_2 e^r \dot{T}^*(r) &= \\ = (e^r - 1) [p_0 (e^r - 2 - \lambda_1 - \lambda_2) + p_1 + \lambda_2 t_0], \\ \lambda_3 e^r \dot{P}^*(r) + \dot{T}^*(r) [e^{2r} - (2 + \lambda_3) e^r + 1] &= \\ = (e^r - 1) [\lambda_3 p_0 + t_0 (e^r - 2 - \lambda_3) + t_1]. \end{aligned} \right\} \quad (3.247)$$

Её определитель представляет возвратный полином четвёртой степени относительно e^r :

$$\begin{aligned} \Delta(e^r) &= e^{4r} - e^{3r} (4 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + e^{2r} [6 + 2(\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + \lambda_1 \lambda_3] - e^r (4 + \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3) + 1 = \\ &= 4e^{2r} \left[\operatorname{ch}^2 r - 2 \operatorname{ch} r \left(1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4} \right) + 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{2} + \frac{\lambda_1 \lambda_3}{3} \right]. \end{aligned}$$

Обозначим

$$\begin{aligned} \operatorname{ch} \beta_1 &= 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4} + \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4} \right)^2 - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{4}}, \\ \operatorname{ch} \beta_2 &= 1 + \frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4} - \sqrt{\left(\frac{\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3}{4} \right)^2 - \frac{\lambda_1 \lambda_3}{4}}. \end{aligned}$$

Нетрудно убедиться, что правые части этих выражений больше единицы, т. е. β_1 и β_2 — вещественны. Получаем теперь

$$\Delta(e^r) = (e^r - e^{\beta_1}) (e^r - e^{-\beta_1}) (e^r - e^{\beta_2}) (e^r - e^{-\beta_2}).$$

Из (247) имеем

$$\dot{P}^*(r) = \frac{Q_1(e^r)}{\Delta(e^r)}, \quad \dot{T}^*(r) = \frac{Q_2(e^r)}{\Delta(e^r)},$$

где обозначено:

$$\begin{aligned} Q_1(e^r) &= \{p_0 [e^{3r} - 2(\operatorname{ch} \beta_1 + \operatorname{ch} \beta_2) e^{2r} + (4 \operatorname{ch} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_2 + 1) e^r - \\ &\quad - (2 + \lambda_1 + \lambda_2)] + p_1 [e^{2r} - (2 + \lambda_3) e^r + 1] + \\ &\quad + \lambda_2 t_0 - \lambda_2 t_1 e^r\} (e^r - 1); \\ Q_2(e^r) &= \{\lambda_3 p_0 - \lambda_3 p_1 e^r + t_0 [e^{3r} - 2(\operatorname{ch} \beta_1 + \operatorname{ch} \beta_2) e^{2r} + \\ &\quad + (4 \operatorname{ch} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_2 + 1) e^r - (2 + \lambda_3)] + t_1 [e^{2r} - \\ &\quad - (2 + \lambda_1 + \lambda_2) e^r + 1]\} (e^r - 1). \end{aligned}$$

Начальные ступенчатые функции находим по второй теореме разложения (2.237). Получаем:

$$\begin{aligned}
 p_k = & \frac{e^{(k-1)\beta_1}}{4 \operatorname{sh} \beta_1 (\operatorname{ch} \beta_1 - \operatorname{ch} \beta_2)} \{p_0 [2 \operatorname{ch} \beta_2 - (2 + \lambda_1 + \lambda_2)] + \\
 & + p_1 [e^{2\beta_1} - (2 + \lambda_3) e^{\beta_1} + 1] + \lambda_2 t_0 - \lambda_2 t_1 e^{\beta_1}\} + \\
 & + \frac{e^{(k-1)\beta_2}}{4 \operatorname{sh} \beta_2 (\operatorname{ch} \beta_2 - \operatorname{ch} \beta_1)} \{p_0 [2 \operatorname{ch} \beta_1 - (2 + \lambda_1 + \lambda_2)] + \\
 & + p_1 [e^{2\beta_2} - (2 + \lambda_3) e^{\beta_2} + 1] + \lambda_2 t_0 - \lambda_2 t_1 e^{\beta_2}\} - \\
 & - \frac{e^{-(k-1)\beta_1}}{4 \operatorname{sh} \beta_1 (\operatorname{ch} \beta_1 - \operatorname{ch} \beta_2)} \{p_0 [2 \operatorname{ch} \beta_2 - (2 + \lambda_1 + \lambda_2)] + \\
 & + p_1 [e^{-2\beta_1} - (2 + \lambda_3) e^{-\beta_1} + 1] + \lambda_2 t_0 - \lambda_2 t_1 e^{-\beta_1}\} - \\
 & - \frac{e^{-(k-1)\beta_2}}{4 \operatorname{sh} \beta_2 (\operatorname{ch} \beta_2 - \operatorname{ch} \beta_1)} \{p_0 [2 \operatorname{ch} \beta_1 - (2 + \lambda_1 + \lambda_2)] + \\
 & + p_1 [e^{-2\beta_2} - (2 + \lambda_3) e^{-\beta_2} + 1] + \\
 & + \lambda_2 t_0 - \lambda_2 t_1 e^{-\beta_2}\}; \quad (3.248)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 t_k = & \frac{e^{(k-1)\beta_1}}{4 \operatorname{sh} \beta_1 (\operatorname{ch} \beta_1 - \operatorname{ch} \beta_2)} \{\lambda_3 p_0 - \lambda_3 p_1 e^{\beta_1} + t_0 [2 \operatorname{ch} \beta_2 - \\
 & - (2 + \lambda_3)] + t_1 [e^{2\beta_1} - (2 + \lambda_1 + \lambda_2) e^{\beta_1} + 1]\} + \\
 & + \frac{e^{(k-1)\beta_2}}{4 \operatorname{sh} \beta_2 (\operatorname{ch} \beta_2 - \operatorname{ch} \beta_1)} \{\lambda_3 p_0 - \lambda_3 p_1 e^{\beta_2} + t_0 [2 \operatorname{ch} \beta_1 - \\
 & - (2 + \lambda_3)] + t_1 [e^{2\beta_2} - (2 + \lambda_1 + \lambda_2) e^{\beta_2} + 1]\} - \\
 & - \frac{e^{-(k-1)\beta_1}}{4 \operatorname{sh} \beta_1 (\operatorname{ch} \beta_1 - \operatorname{ch} \beta_2)} \{\lambda_3 p_0 - \lambda_3 p_1 e^{-\beta_1} + t_0 [2 \operatorname{ch} \beta_2 - \\
 & - (2 + \lambda_3)] + t_1 [e^{-2\beta_1} - (2 + \lambda_1 + \lambda_2) e^{-\beta_1} + 1]\} - \\
 & - \frac{e^{-(k-1)\beta_2}}{4 \operatorname{sh} \beta_2 (\operatorname{ch} \beta_2 - \operatorname{ch} \beta_1)} \{\lambda_3 p_0 - \lambda_3 p_1 e^{-\beta_2} + t_0 [2 \operatorname{ch} \beta_1 - \\
 & - (2 + \lambda_3)] + t_1 [e^{-2\beta_2} - (2 + \lambda_1 + \\
 & + \lambda_2) e^{-\beta_2} + 1]\}. \quad (3.249)
 \end{aligned}$$

Остаётся определить по (246) постоянные p_0 , p_1 , t_0 , t_1 .

Вычисление в общем виде весьма громоздко. Его нужно проводить для заданных числовых значений параметров $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$.

Предполагая, что число витков очень велико, можно получить сравнительно простое приближённое решение задачи, потребовав, чтобы в выражения p_k и t_k не входили слагаемые, содержащие $e^{k\beta_1}$ и $e^{k\beta_2}$.¹ При этом первые два условия (246) будут удовлетворены, но не для конечного, а для бесконечного числа нарезов ($\lim_{n \rightarrow \infty} s_n = 0$, $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = 0$), и ошибка при достаточно большом числе нарезков будет весьма мала.

Приравнивая нулю коэффициенты при $e^{k\beta_1}$ и $e^{k\beta_2}$ в формуле для p_k , получим величины t_0 и t_1 , выраженные через p_0 и p_1 :

$$\left. \begin{aligned} \lambda_2 t_0 &= p_0 (2 + \lambda_1 + \lambda_2 - e^{\beta_1} - e^{\beta_2}) + p_1 (e^{\beta_1 + \beta_2} - 1), \\ \lambda_2 t_1 &= -p_0 (1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)}) + p_1 [e^{\beta_1} + e^{\beta_2} - (2 + \lambda_3)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.250)$$

Приравнивая же нулю коэффициенты при $e^{k\beta_1}$ и $e^{k\beta_2}$ в выражении t_k , получим:

$$\left. \begin{aligned} \lambda_3 p_0 &= t_0 (2 + \lambda_3 - e^{\beta_1} - e^{\beta_2}) + t_1 (e^{\beta_1 + \beta_2} - 1), \\ \lambda_3 p_1 &= -t_0 (1 - e^{-(\beta_1 + \beta_2)}) + t_1 [e^{\beta_1} + e^{\beta_2} - (2 + \lambda_1 + \lambda_2)]. \end{aligned} \right\} \quad (3.251)$$

Эти же соотношения получим, решая (250) относительно p_0 и p_1 , если учтём связь между корнями характеристического уравнения ($\operatorname{ch} \beta_1$ и $\operatorname{ch} \beta_2$) и его коэффициентами; так и должно быть, поскольку выполнение требования обращения в нуль при $k \rightarrow \infty$ усилий p_k должно автоматически привести к обращению в нуль при $k \rightarrow \infty$ и усилий t_k .

Теперь постоянные определяются из двух остающихся ещё в нашем распоряжении условий (246):

$$\sigma_1 = p_0 - t_0, \quad s_1 = Q - p_0,$$

которые по (245) можно также преобразовать к виду:

$$\lambda_3 p_0 = t_0 (1 + \lambda_3) - t_1, \quad (3.252)$$

$$\lambda_3 (p_0 - p_1) + \lambda_2 (t_0 - t_1) + \lambda_1 \lambda_3 p_0 = \lambda_1 \lambda_3 Q. \quad (3.253)$$

¹ Н. Е. Жуковский ограничивается этой степенью приближения при решении задачи о распределении усилий по нарезам болта и гайки для первого расположения (рис. 39а).

Из (252) и (251) находим:

$$\begin{aligned} t_1 &= t_0 (e^{-\beta_1} + e^{-\beta_2} - e^{-\beta_1 - \beta_2}), \\ \lambda_3 p_0 &= t_0 (1 + \lambda_3 - e^{-\beta_1} - e^{-\beta_2} + e^{-\beta_1 - \beta_2}), \\ \lambda_3 p_1 &= t_0 [1 + e^{\beta_1 - \beta_2} + e^{\beta_2 - \beta_1} - (3 + \lambda_1 + \lambda_2) (e^{-\beta_1} + e^{-\beta_2} - e^{-\beta_1 - \beta_2})]. \end{aligned}$$

Подстановка в (253) даёт теперь:

$$\begin{aligned} t_0 &= \frac{\lambda_1 \lambda_3 Q}{2 [\operatorname{sh} (\beta_1 + \beta_2) - \operatorname{sh} \beta_1 - \operatorname{sh} \beta_2]} = \\ &= \frac{\lambda_1 \lambda_3 Q}{8 \operatorname{sh} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta_1}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta_2}{2}}, \quad (3.254) \end{aligned}$$

причём для вывода этого соотношения была использована формула:

$$\lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_1 \lambda_3 = 4 \operatorname{ch} \beta_1 \operatorname{ch} \beta_2 - 2 (\operatorname{ch} \beta_1 + \operatorname{ch} \beta_2),$$

легко получаемая из зависимостей между корнями и коэффициентами характеристического уравнения.

Остаётся составить выражения t_k и p_k . Подстановка в (249) и (248) даёт после несложных, хотя и громоздких, преобразований выражения:

$$t_k = \frac{\lambda_1 \lambda_3 Q}{8 \operatorname{sh} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \left[\frac{e^{-(k + \frac{1}{2})\beta_2}}{\operatorname{sh} \frac{\beta_2}{2}} - \frac{e^{-(k + \frac{1}{2})\beta_1}}{\operatorname{sh} \frac{\beta_1}{2}} \right], \quad (3.255)$$

$$\begin{aligned} p_k &= \frac{\lambda_1 Q}{2 \operatorname{sh} \frac{\beta_1 + \beta_2}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta_1 - \beta_2}{2}} \left[\operatorname{sh} \frac{\beta_1}{2} e^{-(k + \frac{1}{2})\beta_1} - \right. \\ &\quad \left. - \operatorname{sh} \frac{\beta_2}{2} e^{-(k + \frac{1}{2})\beta_2} \right] + t_k. \quad (3.256) \end{aligned}$$

Эти формулы дают решение обобщённой задачи Н. Е. Жуковского при достаточно большом числе витков нарезок.

ГЛАВА IV

МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

§ 22. Струна с сосредоточенными массами

1°. Натянутая струна несёт сосредоточенные равные массы m , расположенные на одинаковых расстояниях. Требуется определить движение, происходящее вследствие сообщения массам начальных отклонений из положения равновесия и начальных скоростей.¹ Массой струны пренебрегаем, её натяжение T неизменно при движении масс.

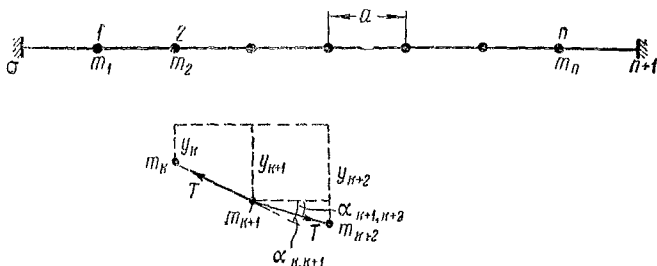


Рис. 43. Струна с сосредоточенными массами.

Равнодействующая вертикальная сила, приложенная к массе m_{k+1} , как видно из рис. 43, будет

$$F_{k+1, y} = T (\sin \alpha_{k+1, k+2} - \sin \alpha_{k, k+1}).$$

¹ Лагранж, Аналитическая механика, стр. 278—288 русского перевода (ОНТИ, 1938).

Заменяя синусы этих малых углов их значениями

$$\frac{1}{a}(y_{k+2} - y_{k+1}), \quad \frac{1}{a}(y_{k+1} - y_k),$$

получим

$$F_{k+1, y} = \frac{T}{a}(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k).$$

Называя далее $\lambda^2 = \frac{T}{am}$ одинаковую для всех масс постоянную, имеющую размерность квадрата частоты, получаем дифференциальное уравнение движения $(k+1)$ -ой массы в форме:

$$\ddot{y}_{k+1} - \lambda^2(y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k) = 0. \quad (4.1)$$

Уравнения движения первой и последней (n) массы можно считать заключающимися в этой записи, если условиться считать

$$y_0 = 0, \quad y_{n+1} = 0. \quad (4.2)$$

Нужно проинтегрировать систему уравнений (1), считая заданными начальные отклонения и скорости всех масс:

$$y_s = y_s^0, \quad \dot{y}_s = \dot{y}_s^0 \quad \text{при } t = 0 \quad (4.3)$$

для $s = 1, 2, \dots, n$.

Изображающая система уравнений будет:

$$\begin{aligned} -\lambda^2 Y_k(p) + (2\lambda^2 + p^2) Y_{k+1}(p) - \lambda^2 Y_{k+2}(p) = \\ = p^2 y_{k+1}^0 + p \dot{y}_{k+1}^0. \end{aligned} \quad (4.4)$$

Получили разностные уравнения для целочисленного аргумента k . Его надо решать по (2) при краевых условиях:

$$Y_0(p) = 0, \quad Y_{n+1}(p) = 0. \quad (4.5)$$

Для упрощения письма введём временно обозначения:

$$z_k = Y_k(p), \quad -\frac{p^2}{\lambda^2} y_k^0 - \frac{p}{\lambda^2} \dot{y}_k^0 = \mu_k. \quad (4.6)$$

Получим разностное уравнение

$$z_{k+2} - \left(2 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right) z_{k+1} + z_k = \mu_{k+1} \quad (4.7)$$

и краевые условия

$$z_0 = 0, \quad z_{n+1} = 0. \quad (4.8)$$

Уравнение (7) встречалось в § 21. Как и там, для решения его удобно ввести вспомогательную величину α :

$$\operatorname{ch} \alpha = \frac{1}{2} (e^\alpha + e^{-\alpha}) = 1 + \frac{p^2}{2\lambda^2}. \quad (4.9)$$

Изображающее уравнение будет

$$Z^*(r) [e^{2r} + (e^\alpha + e^{-\alpha}) e^r + 1] = (e^r - 1) z_1 + M^*(r) e^r, \quad (4.10)$$

так как $z_0 = 0$, $\mu_0 = 0$. Через $M^*(r)$ обозначено изображение ступенчатой функции μ_k .

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{e^r - 1}{e^{2r} - (e^\alpha + e^{-\alpha}) e^r + 1} &= \frac{1}{2 \operatorname{sh} \alpha} \left(\frac{e^r - 1}{e^r - e^\alpha} - \frac{e^r - 1}{e^r - e^{-\alpha}} \right) \xrightarrow{\div} \\ &\xrightarrow{\div} \frac{e^{k\alpha} - e^{-k\alpha}}{2 \operatorname{sh} \alpha} = \frac{\operatorname{sh} k\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}. \end{aligned} \quad (4.11)$$

Применяем далее теорему свёртывания для ступенчатых функций:

$$\begin{aligned} \frac{e^r M^*(r)}{e^{2r} - (e^\alpha + e^{-\alpha}) e^r + 1} &= \frac{e^r M^*(r)}{e^r - 1} \cdot \frac{e^r - 1}{e^{2r} - (e^\alpha + e^{-\alpha}) e^r + 1} \xrightarrow{\div} \\ &\xrightarrow{\div} \sum_{s=0}^k \frac{\operatorname{sh} s\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \mu_{k-s}. \end{aligned}$$

Можно пределы суммирования принять равными 1 и $k-1$, так как слагаемые, соответствующие $s=0$ и $s=k$, обращаются в нуль. Получаем теперь:

$$z_k = z_1 \frac{\operatorname{sh} k\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} + \sum_{s=1}^{k-1} \frac{\operatorname{sh} s\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \mu_{k-s}.$$

Выражаем теперь второе условие (8):

$$z_{n+1} = z_1 \frac{\operatorname{sh} (n+1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} + \sum_{s=1}^n \frac{\operatorname{sh} s\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \mu_{n+1-s} = 0,$$

откуда находим z_1 :

$$z_1 = - \sum_{s=1}^n \frac{\operatorname{sh} s\alpha}{\operatorname{sh} (n+1)\alpha} p_{n+1-s}$$

и подстановка в выражение z_k даёт:

$$z_k = - \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha} \left[\operatorname{sh} k\alpha \sum_{s=1}^n p_{n-s+1} \operatorname{sh} s\alpha - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} (n+1)\alpha \sum_{s=1}^{k-1} p_{k-s} \operatorname{sh} s\alpha \right].$$

В прежних обозначениях это записывается так:

$$Y_k(p) = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha} \left[\operatorname{sh} k\alpha \sum_{s=1}^n \left(\frac{p^2}{\lambda^2} y_{n-s+1}^0 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{p}{\lambda^2} \dot{y}_{n-s+1}^0 \right) \operatorname{sh} s\alpha - \right. \\ \left. - \operatorname{sh} (n+1)\alpha \sum_{s=1}^{k-1} \operatorname{sh} s\alpha \left(\frac{p^2}{\lambda^2} y_{k-s}^0 + \frac{p}{\lambda^2} \dot{y}_{k-s}^0 \right) \right], \quad (4.12)$$

где $\operatorname{sh} \alpha$ определен по (9). Теперь нужно найти начальную функцию по этому изображению. Задача представляется на первый взгляд непростой, так как правая часть зависит от p через посредство α . Но это затруднение может быть устранено.

Чтобы упростить письмо, примем, что отлично от нуля и равно единице только начальное отклонение массы номер ρ , а начальные скорости всех масс равны нулю. Соответствующее $Y_k(p)$ назовём $Y_{k\rho}(p)$; через $Y_{k\rho}^*(p)$ назовём $Y_k(p)$, полученное в предположении, что отлична от нуля только начальная скорость массы номер ρ , тогда как начальные скорости прочих масс и начальные отклонения всех масс равны нулю. Очевидно, что

$$Y_k(p) = \sum_{\rho=1}^n [y_{\rho}^0 Y_{k\rho}(p) + \dot{y}_{\rho}^0 Y_{k\rho}^*(p)] \quad (4.13)$$

и аналогичное соотношение можно написать также для начальных функций.

Из (12) получаем:

$$Y_{kp}(p) = \begin{cases} \frac{p^2 \operatorname{sh} k\alpha \operatorname{sh} (n - \rho + 1)\alpha}{\lambda^2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n + 1)\alpha} & \text{при } k < \rho, \\ \frac{p^2 \operatorname{sh} \rho\alpha \operatorname{sh} (n - k + 1)\alpha}{\lambda^2 \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n + 1)\alpha} & \text{при } k > \rho. \end{cases} \quad (4.14)$$

Запись выражения $Y_{kp}^*(p)$ отличается от (14) только множителем p , вместо p^2 .

Заметим, что из (14) следует

$$Y_{kp}(p) = Y_{\rho k}(p).$$

Достаточно найти начальную функцию для первого из изображений (14). Пусть $z = \operatorname{ch} \alpha$; числитель и знаменатель в (14), т. е. $\operatorname{sh} k\alpha \operatorname{sh} (n - \rho + 1)\alpha$ и $\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n + 1)\alpha$ суть полиномы относительно z степени $n + k - \rho + 1$ и $n + 2$, причём степень числителя меньше степени знаменателя; это легко понять, вспомнив, что $\operatorname{ch} s\alpha$ представляет полином s степени относительно $\operatorname{ch} \alpha$, и представив произведения гиперболических синусов через гиперболические косинусы суммы и разности аргументов.

Корни выражения

$$\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n + 1)\alpha \quad (4.15)$$

суть

$$\alpha = \frac{\sigma \pi i}{n + 1}, \quad \sigma = 0, 1, 2, \dots,$$

и нас интересуют те из них, которые дают различные значения $z = \operatorname{ch} \alpha$; поэтому нужно взять $(n + 2)$ значений σ :

$$\sigma = 0, 1, 2, \dots, n, n + 1,$$

к которым соответствуют

$$z = 1,$$

$$z = \operatorname{ch} \frac{i\pi\sigma}{n + 1} = \cos \frac{\pi\sigma}{n + 1} \quad (\sigma = 1, 2, \dots, n),$$

$$z = -1.$$

Здесь перечислены все корни полинома (15), так как его степень относительно z равна $n+2$. Теперь составляем разложение на простейшие дроби

$$\frac{\operatorname{sh} k\alpha \operatorname{sh} (n-\rho+1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{z+1} + \sum_{\sigma=1}^n \frac{C_{\sigma}}{z - \cos \frac{\pi\sigma}{n+1}}.$$

Определяем обычным путём коэффициенты:

$$A = \lim_{z \rightarrow 1, \alpha \rightarrow 0} \frac{(z-1) \operatorname{sh} k\alpha \operatorname{sh} (n-\rho+1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha} = 0,$$

$$B = \lim_{z \rightarrow -1, \alpha \rightarrow \pi i} \frac{(z+1) \operatorname{sh} k\alpha \operatorname{sh} (n-\rho+1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha} = 0,$$

$$\begin{aligned} C_{\sigma} &= \operatorname{sh} \frac{\sigma\pi k}{n+1} \operatorname{sh} \frac{\sigma\pi i (n-\rho+1)}{n+1} \frac{1}{\left\{ \frac{d}{dz} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha \right\}_{\alpha = \frac{\sigma\pi i}{n+1}}} = \\ &= \frac{1}{n+1} \sin \frac{k\pi\sigma}{n+1} \sin \frac{\rho\pi\sigma}{n+1}, \end{aligned}$$

так как

$$\begin{aligned} \left\{ \frac{d}{dz} \operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha \right\}_{\alpha = \frac{\sigma\pi i}{n+1}} &= \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} [\operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha + \\ &+ \operatorname{sh} \alpha (n+1) \operatorname{ch} (n+1)\alpha]_{\alpha = \frac{\sigma\pi i}{n+1}} = \\ &= (n+1) \cos \sigma\pi = (-1)^{\sigma} (n+1) \end{aligned}$$

и

$$\begin{aligned} \operatorname{sh} \frac{\sigma\pi k}{n+1} \operatorname{sh} \frac{(n-\rho+1)\sigma\pi i}{n+1} &= -\sin \frac{k\pi\sigma}{n+1} \sin \left[\sigma\pi - \frac{\sigma\rho\pi}{n+1} \right] = \\ &= (-1)^{\sigma} \sin \frac{k\pi\sigma}{n+1} \sin \frac{\rho\pi\sigma}{n+1}. \end{aligned}$$

$$\frac{\operatorname{sh} k\alpha \operatorname{sh} (n-\rho+1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh} (n+1)\alpha} = \frac{1}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\sin \frac{\pi\sigma\rho}{n+1} \sin \frac{\pi k\sigma}{n+1}}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \frac{\pi\sigma}{n+1}}. \quad (4.16)$$

Подставляем теперь вместо $\sin \alpha$ его значение (9). Тогда

$$\begin{aligned}
 Y_{kp}(p) &= \frac{2}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \frac{p^2 \sin \frac{\pi \sigma \rho}{n+1} \sin \frac{\pi \sigma \rho}{n+1}}{p^2 + \left[2\lambda \sin \frac{\pi \sigma}{2(n+1)} \right]^2} \div \rightarrow \\
 &\div \rightarrow \frac{2}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \sin \frac{\pi \sigma \rho}{n+1} \sin \frac{\pi \sigma k}{n+1} \cos \left[2\lambda \sin \frac{\pi \sigma}{2(n+1)} \right] t = \\
 &= y_{kp}(t). \quad (4.17)
 \end{aligned}$$

Буквы k и ρ входят в это выражение симметрично; оно имеет место поэтому и при $k > \rho$.

Аналогично получим $Y_{kp}^*(p)$:

$$\begin{aligned}
 Y_{kp}^*(p) &= \frac{2}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \frac{p \sin \frac{\pi \sigma \rho}{n+1} \sin \frac{\pi \sigma k}{n+1}}{p^2 + \left[2\lambda \sin \frac{\pi \sigma}{2(n+1)} \right]^2} \div \rightarrow \\
 &\div \rightarrow \frac{1}{\lambda(n+1)} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\sin \frac{\pi \sigma \rho}{n+1} \sin \frac{\pi \sigma k}{n+1}}{\sin \frac{\pi \sigma}{2(n+1)}} \sin \left[2\lambda \sin \frac{\pi \sigma}{2(n+1)} \right] t = \\
 &= y_{kp}^*(t). \quad (4.18)
 \end{aligned}$$

Эти выражения дают решение задачи. Движение представляет наложение колебаний с частотами

$$k_{\sigma} = 2\lambda \sin \frac{\pi \sigma}{2(n+1)}, \quad (4.19)$$

пропорциональными ординатам n точек, делящих четверть окружности на $(n+1)$ равных частей.

2°. Рассмотрим, в частности, случай, когда к массе номер ρ первоначально покоившейся струны прикладывается в момент $t = \tau$ импульс S . Масса, к которой этот импульс приложен, получит начальную скорость S/m , и по (18) движение любой k -ой массы можно будет представить в форме

$$y_{kp}^*(t) = \frac{2S}{m(n+1)} \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{k_{\sigma}} \sin \frac{\sigma \pi \rho}{n+1} \sin \frac{\sigma k \pi}{n+1} \sin k_{\sigma}(t - \tau). \quad (4.20)$$

Действие силы $f(t)$, приложенной к массе m номер ρ , можно свести к наложению непрерывно распределённых во времени бесконечно малых импульсов $f(\tau) d\tau$ в течение промежутка времени $(0, t)$ действия силы. Поэтому уравнение движения любой массы рассматриваемой системы под действием силы $f(t)$ может быть составлено на основании (20) в виде:¹

$$y_{k\rho}(t) = \frac{2}{m(n+1)} \sum_{\sigma=1}^n \frac{1}{k_{\sigma}} \sin \frac{\sigma\rho\pi}{n+1} \sin \frac{\sigma k\pi}{n+1} \times \\ \times \int_0^t f(\tau) \sin k_{\sigma}(t-\tau) d\tau. \quad (4.21)$$

Изображение этого выражения будет

$$Y_{k\rho}(p) = \frac{2}{m(n+1)} \sum_{\sigma=1}^n \sin \frac{\rho\sigma\pi}{n+1} \sin \frac{k\sigma\pi}{n+1} \frac{F(p)}{p^2 + k_{\sigma}^2}. \quad (4.22)$$

В частности, при действии синусоидально изменяющейся во времени силы имеем:

$$F(p) = f_0 \frac{\omega p}{p^2 + \omega^2}$$

и подстановка в (22) даёт:

$$Y_{k\rho}(p) = \frac{2f_0}{m(n+1)} \sum_{\sigma=1}^n \sin \frac{\rho\sigma\pi}{n+1} \sin \frac{k\sigma\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{k_{\sigma}^2 - \omega^2} \times \\ \times \left(\frac{\omega p}{p^2 + \omega^2} - \frac{\omega}{k_{\sigma}} \frac{pk_{\sigma}}{p^2 + k_{\sigma}^2} \right) \rightarrow \frac{2f_0}{m(n+1)} \times \\ \times \sum_{\sigma=1}^n \sin \frac{\rho\sigma\pi}{n+1} \sin \frac{k\sigma\pi}{n+1} \cdot \frac{1}{k_{\sigma}^2 - \omega^2} \left(\sin \omega t - \frac{\omega}{k_{\sigma}} \sin k_{\sigma} t \right). \quad (4.23)$$

¹ Способ рассуждения, приведённый здесь, в сущности повторяет сказанное в § 13 гл. II, что знание переходного процесса в линейной системе от единичного импульса позволяет построить решение для любого закона изменения сил, действующих на систему.

Таково движение рассматриваемой системы масс (первоначально покоившихся) под действием синусоидальной силы частоты ω . Рассмотрим, в частности, чисто вынужденные колебания, т. е. колебания, имеющие частоту ω ; находим:

$$y_{kp}(t) = a_{k\sigma} \sin \omega t, \quad a_{k\sigma} = \frac{2f_0}{m(n+1)} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\sin \frac{\rho\sigma\pi}{n+1} \sin \frac{k\sigma\pi}{n+1}}{k_{\sigma}^2 - \omega^2}. \quad (4.24)$$

Подставляем в выражение $a_{k\sigma}$ значение k_{σ}^2 :

$$k_{\sigma}^2 = 4\lambda^2 \sin^2 \frac{\pi\sigma}{2(n+1)} = 2\lambda^2 \left(1 - \cos \frac{\pi\sigma}{n+1}\right).$$

Получаем

$$a_{k\sigma} = \frac{f_0}{(n+1)m\lambda^2} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\sin \frac{\rho\pi\sigma}{n+1} \sin \frac{k\pi\sigma}{n+1}}{1 - \frac{\omega^2}{2\lambda^2} - \cos \frac{\pi\sigma}{n+1}}.$$

Введём (формально) обозначение:

$$1 - \frac{\omega^2}{2\lambda^2} = \operatorname{ch} \alpha. \quad (4.25)$$

Тогда получим по (4.16):

$$\begin{aligned} a_{k\sigma} &= \frac{f_0}{m\lambda^2(n+1)} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi\sigma}{n+1} \sin \frac{\rho\pi\sigma}{n+1}}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \frac{\pi\sigma}{n+1}} = \\ &= \begin{cases} \frac{f_0}{m\lambda^2} \frac{\operatorname{sh} k\alpha \operatorname{sh}(n-\rho+1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(n+1)\alpha}, & (k < \rho) \\ \frac{f_0}{m\lambda^2} \frac{\operatorname{sh} \rho\alpha \operatorname{sh}(n-k+1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha \operatorname{sh}(n+1)\alpha} & (k > \rho). \end{cases} \quad (4.26) \end{aligned}$$

Нужно различать два случая:

$$\text{а) } 1 - \frac{\omega^2}{2\lambda^2} > -1; \quad \text{б) } 1 - \frac{\omega^2}{2\lambda^2} < -1.$$

а) Пусть имеет место первый случай, т. е. $\omega < 2\lambda$; число α будет чисто мнимым ($\alpha = i\beta$). Поэтому, определив вели-

чину β так, чтобы $\cos \beta = 1 - \frac{\omega^2}{2\lambda^2}$, мы можем выражение амплитуды вынужденных колебаний представить в форме:

$$\alpha_{kp} = \begin{cases} \frac{f_0}{m\lambda^2} \frac{\sin k\beta \sin(n-p+1)\beta}{\sin \beta \sin(n+1)\beta} & (k < p) \\ \frac{f_0}{m\lambda^2} \frac{\sin p\beta \sin(n-k+1)\beta}{\sin \beta \sin(n+1)\beta} & (k > p). \end{cases} \quad (4.27)$$

Если, например, сила приложена к первой массе, то $a_{k1} = \frac{f_0}{m\lambda^2} \frac{\sin(n-k+1)\beta}{\sin(n+1)\beta}$, т. е. амплитуды отдельных масс будут сначала убывать, потом опять возрастать и т. д.

б) $\omega > 2\lambda$. Число α будет комплексным вида $i\pi + \alpha_1$. Действительно, при таком α имеем:

$$\operatorname{ch} \alpha = \operatorname{ch}(i\pi + \alpha_1) = -\operatorname{ch} \alpha_1 = 1 - \frac{\omega^2}{2\lambda^2},$$

т. е.

$$\operatorname{ch} \alpha_1 = \frac{\omega^2}{2\lambda^2} - 1 > 1$$

и, значит, α_1 вещественно. Получаем:

$$a_{kp} = \begin{cases} (-1)^{k+p+1} \frac{f_0}{m\lambda^2} \frac{\operatorname{sh} k\alpha_1 \operatorname{sh}(n-p+1)\alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1} & (k < p) \\ (-1)^{k+p+1} \frac{f_0}{m\lambda^2} \frac{\operatorname{sh} p\alpha_1 \operatorname{sh}(n-k+1)\alpha_1}{\operatorname{sh} \alpha_1 \operatorname{sh}(n+1)\alpha_1} & (k > p). \end{cases} \quad (4.28)$$

Если, например, сила приложена к первой массе, то $a_{k1} = (-1)^k \frac{f_0}{m\lambda^2} \frac{\operatorname{sh}(n-k+1)\alpha_1}{\operatorname{sh}(n+1)\alpha_1}$, и амплитуды вынужденных колебаний масс будут монотонно убывать по мере удаления от места приложения силы. Если число масс велико, то вынужденные колебания достаточно удалённых масс будут практически пренебрежимо малыми. Рассматриваемая система *не пропускает* колебаний частоты $\omega > 2\lambda$, но передает колебания меньшей частоты.

3°. Фильтр механических колебаний. На рис. 44 изображена та же схема m масс на невесомой струне, но теперь каждая масса ещё, кроме того, подрессорена

пружиной жёсткости c . Уравнения движения (1) примут вид:

$$\ddot{y}_{k+1} - \lambda^2 y_{k+2} + (2\lambda^2 + v^2) y_{k+1} - \lambda^2 y_k = 0, \quad (4.29)$$

где введено обозначение $v^2 = \frac{c}{m}$.

Решение задачи ничем не будет отличаться от приведенного выше, если вместо (9) теперь ввести обозначение

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{p^2}{2\lambda^2} + \frac{v^2}{\lambda^2}. \quad (4.30)$$

Это изменение нужно будет учесть при обратном переходе от вспомогательного обозначения α к букве p , т. е. при подстановке в (16) вместо $\operatorname{ch} \alpha$ его значения — теперь (30),



Рис. 44. Струна с сосредоточенными подрессоренными массами.

а не (9). Получим те же формулы для отклонений движущихся масс, но с изменённым выражением частот колебаний; действительно, вместо (17) теперь находим:

$$Y_{k\rho}(p) = \frac{2}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \frac{p^2 \sin \frac{\sigma\rho\pi}{n+1} \sin \frac{\sigma k\pi}{n+1}}{p^2 + v^2 + \left[2\lambda \sin \frac{\pi\sigma}{2(n+1)} \right]^2} \div \rightarrow$$

$$\div \rightarrow \frac{2}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \sin \frac{\sigma\rho\pi}{n+1} \sin \frac{\sigma k\pi}{n+1} \cos k_{\sigma} t,$$

где k_{σ} определяется из соотношения, заменяющего (19):

$$k_{\sigma}^2 = v^2 + \left[2\lambda \sin \frac{\pi\sigma}{2(n+1)} \right]^2 = v^2 + 2\lambda^2 \left(1 - \cos \frac{\pi\sigma}{n+1} \right). \quad (4.31)$$

Обращаемся к решению задачи о чисто вынужденных колебаниях под действием синусоидальной силы, приложенной к некоторой массе (номер ρ) рассматриваемой системы; очевидно, найдём то же самое выражение (24) для ампли-

туды вынужденных колебаний. Заменяя в нём k_σ его значением (31), теперь получаем:

$$a_{kp} = \frac{f_0}{m\lambda^2(n+1)} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\sin \frac{\pi\rho\sigma}{n+1} \sin \frac{\pi k\sigma}{n+1}}{1 + \frac{\nu^2}{2\lambda^2} - \frac{\omega^2}{2\lambda^2} - \cos \frac{\pi\sigma}{n+1}}. \quad (4.32)$$

Чтобы произвести суммирование, снова примем, подобно (25):

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{\nu^2}{2\lambda^2} - \frac{\omega^2}{2\lambda^2} \quad (4.33)$$

и по (16) получим опять выражение (26); но здесь $\operatorname{ch} \alpha$ может быть и вещественным, и чисто мнимым, и комплексным.

Разберём три случая, которые могут представиться.

$$a) \quad 1 + \frac{\nu^2}{2\lambda^2} - \frac{\omega^2}{2\lambda^2} > 1, \quad \text{т. е. } \nu > \omega.$$

В этом случае $\operatorname{ch} \alpha > 1$, т. е. α вещественно и амплитуды колебаний масс даются формулами (26). По мере удаления от массы, к которой приложена возмущающая сила, амплитуды убывают; практически достаточно удалённые массы останутся неподвижными.

$$б) \quad -1 < 1 + \frac{\nu^2}{2\lambda^2} - \frac{\omega^2}{2\lambda^2} < 1, \quad \text{т. е. } \sqrt{4\lambda^2 + \nu^2} > \omega > \nu.$$

Теперь $|\operatorname{ch} \alpha| < 1$, т. е. α — чисто мнимое число. Полагая $\alpha = i\beta$ и определяя β равенством $\cos \beta = 1 + \frac{\nu^2 - \omega^2}{2\lambda^2}$, получим для амплитуды вынужденных колебаний выражения (27). При удалении от места приложения сил не происходит монотонного уменьшения амплитуд колебаний.

$$в) \quad 1 + \frac{\nu^2 - \omega^2}{2\lambda^2} < -1, \quad \text{т. е. } \omega > \sqrt{4\lambda^2 + \nu^2}.$$

Теперь α будет комплексным числом вида $i\pi + \alpha_1$ и, определив α_1 из соотношения $\operatorname{ch} \alpha_1 = \frac{\omega^2 - \nu^2}{2\lambda^2} - 1$, получим выражения амплитуд в форме (28). Амплитуды убывают монотонно по мере удаления от места приложения сил.

Таким образом, рассматриваемая система является *фильтром механических колебаний*; если к первой (например) массе приложить периодическую силу, то удалённые массы будут реагировать только на те гармоники этой силы, частоты которых заключены в пределах ν и $\sqrt{\nu^2 + 4\lambda^2}$.

Если λ взять достаточно малым, то можно получить весьма узкую область частот, пропускаемых фильтром.

4°. Пуск в ход поезда. На рис. 45 изображена схема, которую рассматривал Н. Е. Жуковский для исследования вопроса о натяжениях в сцепке при пуске в ход поезда:¹ $(n+1)$ материальных точек (вагоны и паровоз) одинаковых масс m соединены упругими пружинами; к крайней массе приложена сила (опорная сила паровоза) $q(t)$.

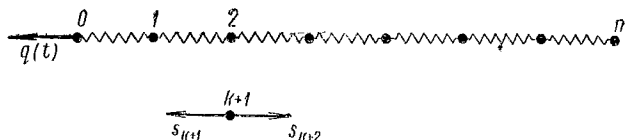


Рис. 45. n масс, соединённых упругими пружинами (схема поезда).

Составим дифференциальное уравнение для натяжений пружин. Уравнение движения $(k+1)$ -ой массы будет:

$$m\ddot{x}_{k+1} = s_{k+2} - s_{k+1}. \quad (4.34)$$

С другой стороны, обозначая через c жёсткость пружины, имеем:

$$s_{k+1} = c(x_{k+1} - x_k) \quad (4.35)$$

и, следовательно:

$$\ddot{x}_{k+1} = \frac{c}{m}(s_{k+2} - 2s_{k+1} + s_k).$$

Для крайних масс (0 и n) получаем:

$$\ddot{x}_1 = \frac{c}{m}[s_2 - 2s_1 + q(t)], \quad \ddot{x}_n = \frac{c}{m}(-2s_n + s_{n-1}).$$

¹ Работа (усилие) русского сквозного и американского (несквозного) тягового приборов при трогании поезда с места и в начале его движения. Собр. соч., VIII, ОНТИ, 1937, стр. 221--255.]

Получаем систему дифференциальных уравнений

$$\ddot{s}_{k+1} = \lambda^2 (s_{k+2} - 2s_{k+1} + s_k), \quad \lambda^2 = \frac{c}{m}. \quad (4.36)$$

Число k можно считать принимающим значения $0, 1, 2, \dots, n-1$, если условиться, что

$$s_0 = q(t), \quad s_{n+1} = 0. \quad (4.37)$$

Изображающая система уравнений будет:

$$S_{k+2}(p) - \left(2 + \frac{p^2}{\lambda^2}\right) S_{k+1}(p) + S_k(p) = 0, \quad (4.38)$$

так как, поскольку в начальный момент перемещения и скорости всех масс равны нулю, то по (35) обращаются в нуль натяжения и их первые производные по времени. Полученное разностное уравнение нужно решать при краевых условиях:

$$S_0(p) = Q(p) \div q(t), \quad S_{n+1}(p) = 0. \quad (4.39)$$

Повторяя ход вычислений п. 1°, примем для упрощения письма

$$S_k(p) = z_k, \quad 1 + \frac{p^2}{2\lambda^2} = \operatorname{ch} \alpha.$$

Получаем разностное уравнение:

$$z_{k+2} - 2z_{k+1} \operatorname{ch} \alpha + z_k = 0,$$

изображение которого, учитывая первое краевое условие (39), будет:

$$\begin{aligned} \ddot{Z}^*(r) [e^{2r} - e^r (e^\alpha + e^{-\alpha}) + 1] = \\ = (e^r - 1) [e^r Q(p) + z_1 - 2Q(p) \operatorname{ch} \alpha]. \end{aligned}$$

Отсюда находим

$$\begin{aligned} z_k = \frac{1}{\operatorname{sh} \alpha} \{ z_1 \operatorname{sh} k\alpha + Q(p) [\operatorname{sh} (k+1)\alpha - 2 \operatorname{ch} \alpha \operatorname{sh} k\alpha] \} = \\ = z_1 \frac{\operatorname{sh} k\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} - Q(p) \frac{\operatorname{sh} (k-1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}, \end{aligned}$$

и второе условие (39) позволяет определить z_1 :

$$z_1 = Q(p) \frac{\operatorname{sh} n\alpha}{\operatorname{sh}(n+1)\alpha}.$$

Подстановка в выражение z_k даёт:

$$z_k = S_k(p) = Q(p) \frac{\operatorname{sh}(n-k+1)\alpha}{\operatorname{sh}(n+1)\alpha}. \quad (4.40)$$

Имеем разложение на простейшие дроби:

$$\frac{\operatorname{sh}(n-k+1)\alpha}{\operatorname{sh}(n+1)\alpha} = \frac{A}{\operatorname{ch}\alpha - 1} + \frac{B}{\operatorname{ch}\alpha + 1} + \sum_{\sigma=1}^n \frac{C_{\sigma}}{\operatorname{ch}\alpha - \cos \frac{\pi\sigma}{n+1}}.$$

Определяя обычным способом коэффициенты, получаем:

$$A = 0, \quad B = 0$$

$$C_{\sigma} = \frac{\operatorname{sh} \frac{(n-k+1)i\pi\sigma}{n+1}}{\left\{ \frac{d \operatorname{sh}(n+1)\alpha}{d \operatorname{ch}\alpha} \right\}_{\alpha = \frac{i\pi\sigma}{n+1}}} = \frac{1}{n+1} \sin \frac{k\pi\sigma}{n+1} \sin \frac{\pi\sigma}{n+1}.$$

Заменяв ещё $\operatorname{ch}\alpha$ его значением, находим:

$$s_k(t) \leftarrow S_k(p) = \frac{2\lambda^2 Q(p)}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \frac{\sin \frac{k\pi\sigma}{n+1} \sin \frac{\pi\sigma}{n+1}}{p^2 + k_{\sigma}^2}, \quad (4.41)$$

где k_{σ}^2 определяется по (19).

Применив теорему свёртывания, получаем:

$$s_k(t) = \frac{2\lambda^2}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \sin \frac{\pi\sigma k}{n+1} \sin \frac{\pi\sigma}{n+1} \times \\ \times \frac{1}{k_{\sigma}} \int_0^t q(\tau) \sin k_{\sigma}(t-\tau) d\tau. \quad (4.42)$$

В частном случае постоянной силы $q(t) = Q_0$ получаем непосредственно по (41):

$$\begin{aligned} s_k(t) &= \frac{2\lambda^2 Q_0}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \sin \frac{\pi \sigma k}{n+1} \sin \frac{\pi \sigma}{n+1} \frac{1 - \cos k_\sigma t}{k_\sigma^2} = \\ &= \frac{Q_0}{n+1} \sum_{\sigma=1}^n \sin \frac{\pi \sigma k}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi \sigma}{2(n+1)} (1 - \cos k_\sigma t). \end{aligned} \quad (4.43)$$

Эта формула даёт точное значение натяжения в любой ветви в любой момент времени. Чтобы создать качественное представление о характере изменения натяжения в случае большого числа вагонов, примем следующие допущения:

$$k_\sigma = 2\lambda \sin \frac{\pi \sigma}{2(n+1)} \approx \frac{\lambda \pi \sigma}{n+1},$$

что, без сомнения, допустимо для низших частот (при малых σ); но такое упрощение является приемлемым и для больших частот, когда σ близко к n , так как соответствующие слагаемые в (43) вследствие наличия мало отличающегося от нуля при $\sigma \approx n$ множителя $\operatorname{ctg} \frac{\pi \sigma}{2(n+1)}$ не могут существенно исказить величину суммы (43). Эти же соображения делают допустимой замену

$$\frac{1}{n+1} \operatorname{ctg} \frac{\pi \sigma}{2(n+1)} \approx \frac{2}{\pi \sigma}.$$

Обозначим далее $\frac{k}{n+1} = x$, $\frac{\lambda}{n+1} = c$ и суммирование распространяем по всем целым n . Таким образом получается предложенное Н. Е. Жуковским приближённое решение, годное для большого числа масс:

$$s_k(t) = \frac{2Q_0}{\pi} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \sigma x}{\sigma} (1 - \cos \pi \sigma ct).$$

Ряд $\frac{2}{\pi} \sum_{\sigma=1}^{\infty} \frac{\sin \pi \sigma x}{\sigma} = f(x)$ представляет периодическую функцию x периода 2, которая при $0 < x < 2$ равна

$$f(x) = 1 - x. \quad (4.44)$$

Замечая далее, что

$$\sin \pi \sigma x \cos \pi \sigma ct = \frac{1}{2} [\sin \pi \sigma (x + ct) + \sin \pi \sigma (x - ct)],$$

получаем

$$s_k(t) = Q_0 \left[f(x) - \frac{1}{2} f(x - ct) - \frac{1}{2} f(x + ct) \right].$$

Эта формула указывает на волновой характер распространения натяжения.

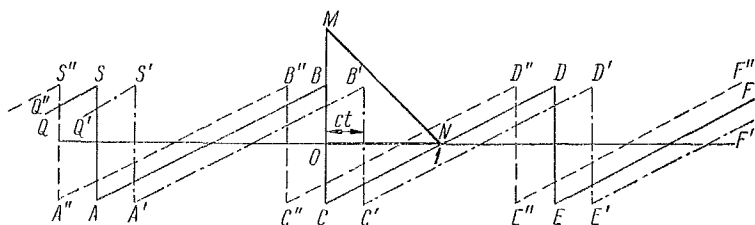


Рис. 46. Графическое построение распределения натяжения в пружинах $ct < 1$.

Построим на отрезке оси x длиной 1 прямую MN , уравнение которой даётся выражением (44), и ломаную $\dots SABCDEF\dots$, отрезки которой $\dots AB, CD, EF\dots$ имеют уравнения:

$$\begin{aligned} AB \quad f_{-1}(x) &= -\frac{1}{2} f(x+2) = -\frac{1}{2} (x+1), \\ CD \quad f_0(x) &= -\frac{1}{2} f(x) = -\frac{1}{2} (x-1), \\ EF \quad f_1(x) &= -\frac{1}{2} f(x-2) = -\frac{1}{2} (3-x) \\ &\text{и т. д.} \end{aligned}$$

Передвинем теперь указанную ломаную линию вправо на расстояние ct в положение $\dots S'A'B'C'D'E'F'\dots$ и влево на такое же расстояние в положение $\dots S''A''B''C''D''E''F''\dots$. Складывая ординаты прямой MN с ординатами этих ломаных линий, получим в масштабе Q_0 натяжение в рассматриваемой точке в момент времени t .

Таким образом, натяжение Q_0 будет передаваться от головы поезда к его концу, потом натяжение пойдет от конца поезда к его началу, при $ct = 2$ натяжение будет повсюду равным нулю, при $2 < ct < 3$ натяжение Q_0 снова распространяется от головы поезда к концу и т. д. Постоянная c выражает „скорость“ распространения натяжения — это доля общего числа вагонов, охватываемых возмущением за единицу времени.

При решении задачи мы считали массу паровоза равной массе вагона. Если отбросить это допущение, то решение несколько усложнится, но при приближённой трактовке задачи окажется, что от головы поезда к его концу будет переноситься с той же „скоростью“ c натяжение величины

$$\frac{Q_0}{1 + \frac{M}{mn}} \frac{n+1}{n},$$

где Q_0 — опорная сила паровоза, M — его масса, mn — масса всех вагонов. Как и выше, эта волна возмущения отразится от конца поезда, после чего от конца к началу начнёт распространяться натяжение нуль и т. д.

§ 23. Крутильные колебания однородного двигателя с маховиком

Изображенная на рис. 48 схема представляет вал многоцилиндрового однорядного двигателя с маховиком. Двигатель считаем однородным, т. е. предполагаем, что приведенные

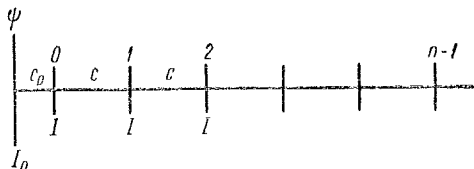


Рис. 48. Расчётная схема однородного двигателя с маховиком.

к оси вала моменты инерции кривошипных механизмов отдельных цилиндров и жесткости на кручение участков вала между цилиндрами одинаковы. Рассматриваются крутильные колебания, которые возникнут в системе при нарушении

равновесного режима вращения с постоянной угловой скоростью.

Составляем уравнения движения системы, схематизированной в виде ряда дисков на упругом, лишённом массы валу: уравнение вращения маховика:

$$I_0 \ddot{\psi} = -c_0 (\psi - \varphi_0);$$

уравнение вращения первого диска (ему удобно приписать индекс нуль):

$$I \ddot{\varphi}_0 = -c_0 (\varphi_0 - \psi) - c (\varphi_0 - \varphi_1);$$

уравнения вращения второго, третьего, ..., $n-2$ дисков:

$$I \ddot{\varphi}_{k+1} = -c (\varphi_{k+1} - \varphi_k) - c (\varphi_{k+1} - \varphi_{k+2}),$$

где $k = 0, 1, \dots, n-3$;

уравнение вращения последнего диска (номер $n-1$):

$$I \ddot{\varphi}_{n-1} = -c (\varphi_{n-1} - \varphi_{n-2}).$$

Составляем изображающие уравнения:

$$\Psi(p) \left(p^2 + \frac{c_0}{I_0} \right) = \frac{c_0}{I_0} \Phi_0(p) + p^2 \psi(0) + p \dot{\psi}(0),$$

$$\Phi_0(p) \left(p^2 + \frac{c + c_0}{I} \right) = \frac{c_0}{I} \Psi(p) + \frac{c}{I} \Phi_1(p) + p^2 \varphi_0(0) + p \dot{\varphi}_0(0),$$

$$\begin{aligned} \Phi_{k+1}(p) \left(p^2 + 2 \frac{c}{I} \right) &= \frac{c}{I} [\Phi_k(p) + \Phi_{k+2}(p)] + \\ &+ p^2 \varphi_{k+1}(0) + p \dot{\varphi}_{k+1}(0), \end{aligned}$$

$$\Phi_{n-1}(p) \left(p^2 + \frac{c}{I} \right) = \frac{c}{I} \Phi_{n-2}(p) + p^2 \varphi_{n-1}(0) + p \dot{\varphi}_{n-1}(0).$$

Из двух первых уравнений исключаем $\Psi(p)$; получаем зависимость между $\Phi_0(p)$ и $\Phi_1(p)$:

$$\begin{aligned} \Phi_0(p) &= \frac{c}{I} \frac{p^2 + \frac{c_0}{I_0}}{\Delta^*(p)} \Phi_1(p) + \frac{c_0 p^2 \psi(0) + p \dot{\psi}(0)}{I \Delta^*(p)} + \\ &+ \frac{[p^2 \varphi_0(0) + p \dot{\varphi}_0(0)] \left(p^2 + \frac{c_0}{I_0} \right)}{\Delta^*(p)}, \end{aligned}$$

где

$$\Delta^*(p) = p^4 + \left(\frac{c_0 + c}{I} + \frac{c_0}{I_0} \right) p^2 + \frac{cc_0}{II_0}.$$

Вводим обозначения:

$$\frac{c}{I} = \lambda^2, \quad \frac{c_0}{I_0} = \lambda_0^2, \quad \frac{I}{I_0} = \kappa.$$

Получаем разностное уравнение:

$$z_{k+2} - 2 \left(1 + \frac{p^2}{2\lambda^2} \right) z_{k+1} + z_k = -\mu_{k+1} \quad (4.45)$$

и краевые условия к нему:

$$z_0 = \frac{\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\Delta\left(\frac{p}{\lambda}\right)} (z_1 + \mu_0) + \frac{\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \psi(0) + \frac{p}{\lambda^2} \dot{\psi}(0)}{\Delta\left(\frac{p}{\lambda}\right)}, \quad (4.46)$$

$$z_{n-1} = \frac{1}{\frac{p^2}{\lambda^2} + 1} (z_{n-2} + \mu_{n-1}), \quad (4.47)$$

где обозначено:

$$\Delta\left(\frac{p}{\lambda}\right) = \frac{p^4}{\lambda^4} + \frac{p^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2 \kappa + 1}{\lambda^2 \kappa} \right) + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2},$$

$$z_k = \Phi_k(p), \quad \mu_k = \frac{p^2}{\lambda^2} \varphi_k(0) + \frac{p}{\lambda^2} \dot{\varphi}_k(0).$$

Как и выше, вводим в рассмотрение вспомогательный параметр α :

$$\operatorname{ch} \alpha = 1 + \frac{p^2}{2\lambda^2}.$$

Изображающее уравнение будет

$$\begin{aligned} \check{Z}(r) [e^{2r} - e^r (e^\alpha + e^{-\alpha}) + 1] = \\ = (e^r - 1) (e^r z_0 + z_1 - 2z_0 \operatorname{ch} \alpha) - e^r \check{M}(r) + (e^r - 1) \mu_0 \end{aligned}$$

Его решение было получено выше; оно имеет вид:

$$z_k = (z_1 + \mu_0) \frac{\operatorname{sh} k\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} - z_0 \frac{\operatorname{sh} (k-1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} - \sum_{s=0}^k \frac{\operatorname{sh} s\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \mu_{k-s}.$$

Заменяя z_0 его значением по (46), получим:

$$z_k = (z_1 + \mu_0) \left[\frac{\operatorname{sh} k\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} - \frac{\operatorname{sh} (k-1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\Delta\left(\frac{p}{\lambda}\right)} \right] - \\ - \frac{\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{p^2}{\lambda^2} \psi(0) + \frac{p}{\lambda^2} \psi(0)}{\Delta\left(\frac{p}{\lambda}\right)} \frac{\operatorname{sh} (k-1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} - \sum_{s=0}^k \frac{\operatorname{sh} s\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \mu_{k-s}. \quad (4.48)$$

Чтобы сделать последующее вычисление менее громоздким, примем сначала, что начальное возмущение сообщается только маховику, т. е. что $\mu_k = 0$ ($k = 0, 1, \dots, n-1$). Временно обозначим также

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \left[\frac{p^2}{\lambda^2} \psi(0) + \frac{p}{\lambda^2} \dot{\psi}(0) \right] = A(p).$$

Получаем

$$z_{n-1} = z_1 \left[\frac{\operatorname{sh} (n-1)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} - \frac{\operatorname{sh} (n-2)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha} \frac{\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2}}{\Delta\left(\frac{p}{\lambda}\right)} \right] - \\ - \frac{A(p)}{\Delta\left(\frac{p}{\lambda}\right)} \frac{\operatorname{sh} (n-2)\alpha}{\operatorname{sh} \alpha}$$

и с соответствующими заменами — выражение z_{n-2} . Остаётся по (47) определить z_1 . Имеем:

$$z_1 \left\{ \Delta\left(\frac{p}{\lambda}\right) \left[\left(\frac{p^2}{\lambda^2} + 1 \right) \operatorname{sh} (n-1)\alpha - \operatorname{sh} (n-2)\alpha \right] - \right. \\ \left. - \left(\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \left[\left(\frac{p^2}{\lambda^2} + 1 \right) \operatorname{sh} (n-2)\alpha - \operatorname{sh} (n-3)\alpha \right] \right\} = \\ = A(p) \left[\left(\frac{p^2}{\lambda^2} + 1 \right) \operatorname{sh} (n-2)\alpha - \operatorname{sh} (n-3)\alpha \right].$$

Замечая, что

$$\left(\frac{p^2}{\lambda^2} + 1 \right) \operatorname{sh} m\alpha - \operatorname{sh} (m-1)\alpha = (2 \operatorname{ch} \alpha - 1) \operatorname{sh} m\alpha - \\ - \operatorname{sh} (m-1)\alpha = \operatorname{sh} (m+1)\alpha - \operatorname{sh} m\alpha = 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \left(m + \frac{1}{2} \right) \alpha,$$

найдем

$$z_1 = \frac{A(p) \operatorname{ch} \left(n - \frac{3}{2} \right) \alpha}{\Delta \left(\frac{p}{\lambda} \right) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha - \left(\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \operatorname{ch} \left(n - \frac{3}{2} \right) \alpha},$$

и подстановка в (48) даёт:

$$z_k = \frac{A(p) \operatorname{ch} \left(n - k - \frac{1}{2} \right) \alpha}{\Delta \left(\frac{p}{\lambda} \right) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha - \left(\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \operatorname{ch} \left(n - \frac{3}{2} \right) \alpha}.$$

Преобразуем знаменатель D^* этого выражения, подставляя вместо $\Delta \left(\frac{p}{\lambda} \right)$ его значение:

$$\begin{aligned} D^* &= \left[\frac{p^4}{\lambda^4} + \frac{p^2}{\lambda^2} \left(1 + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{\kappa + 1}{\kappa} \right) + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right] \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha - \\ &- \left(\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \operatorname{ch} \left(n - \frac{3}{2} \right) \alpha = \left(\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \times \\ &\times \left[\left(\frac{p^2}{\lambda^2} + 1 \right) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha - \operatorname{ch} \left(n - \frac{3}{2} \right) \alpha \right] + \\ &- \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} \frac{p^2}{\lambda^2} \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha = \left(\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \times \\ &\times \left[\left(2 \operatorname{ch} \alpha - 1 \right) \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha - \operatorname{ch} \left(n - \frac{3}{2} \right) \alpha \right] + \\ &+ 4 \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} \operatorname{sh}^2 \frac{\alpha}{2} \operatorname{ch} \left(n - \frac{1}{2} \right) \alpha = \\ &= 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \left\{ \left(\frac{p^2}{\lambda^2} + \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \right) \operatorname{sh} n \alpha + \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} [\operatorname{sh} n \alpha - \operatorname{sh} (n-1) \alpha] \right\}. \end{aligned}$$

Наконец, подставляя $\frac{p^2}{\lambda^2} = 2 (\operatorname{ch} \alpha - 1)$, получаем:

$$\begin{aligned} D^* &= 2 \operatorname{sh} \frac{\alpha}{2} \left[\operatorname{sh} (n+1) \alpha + \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{\kappa + 1}{\kappa} - 2 \right) \operatorname{sh} n \alpha + \right. \\ &\quad \left. + \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} \right) \operatorname{sh} (n-1) \alpha \right]. \end{aligned}$$

Возвращаясь к исходным обозначениям, находим:

$$\Phi_k(p) = \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} \left[\frac{p^2}{\lambda^2} \psi(0) + \frac{p}{\lambda^2} \dot{\psi}(0) \right] \frac{\operatorname{ch} \left(n - k - \frac{1}{2} \right) \alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{D}, \quad (4.49)$$

где

$$D = \operatorname{sh} \alpha \left[\operatorname{sh} (n+1) \alpha + \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{\kappa+1}{\kappa} - 2 \right) \operatorname{sh} n \alpha + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} \right) \operatorname{sh} (n-1) \alpha \right]. \quad (4.50)$$

Рассмотрим теперь случай сообщения начального возмущения диском. В (48) полагаем равными нулю $\psi(0)$ и $\dot{\psi}(0)$. Прделав аналогичное вычисление, получим, принимая, что отлично от нуля только μ_p :

$$\Phi_{kp}(p) = \frac{\mu_p}{D} \left[\operatorname{ch} \left(k + \frac{3}{2} \right) \alpha + \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{\kappa+1}{\kappa} - 2 \right) \operatorname{ch} \left(k + \frac{1}{2} \right) \alpha + \right. \\ \left. + \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} \right) \operatorname{ch} \left(k - \frac{1}{2} \right) \alpha \right] \operatorname{ch} \left(n - p - \frac{1}{2} \right) \alpha \quad (4.51)$$

при $p > k$; при $p < k$ нужно поменять под знаком гиперболических косинусов буквы p и k местами.

Остаётся перейти к начальным функциям. Знаменатель D в выражениях (49) и (51) представляет полином $(n+2)$ -ой степени относительно $\operatorname{ch} \alpha$; два корня этого полинома очевидны: $\operatorname{ch} \alpha = 1$, $\operatorname{ch} \alpha = -1$, что соответствует $\alpha = 0$ и $\alpha = \pi l$.

Остальные корни чисто мнимые. Чтобы найти их, полагаем $\alpha = i\beta$ в выражении (50) и находим корни уравнения:

$$\sin (n+1) \beta - \left(2 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{\kappa+1}{\kappa} \right) \sin n \beta + \\ + \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} \right) \sin (n-1) \beta = 0, \quad (4.52)$$

включающиеся в промежутке $(0, \pi)$. Остальные корни будут повторять те же значения величины $\operatorname{ch} \alpha$ и потому не представляют интереса.

Обозначим эти корни $\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_n$. Существуют практические способы нахождения их с помощью специальных таблиц.¹

Составление выражения для $\varphi_{kp}(t)$ теперь не представляет труда. Полагаем, как уже неоднократно делалось:

$$\Phi_{kp}(p) = \left[\frac{A}{\operatorname{ch} \alpha - 1} + \frac{B}{\operatorname{ch} \alpha + 1} + \sum_{\sigma=1}^n \frac{C_{\sigma}}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_{\sigma}} \right] \mu_p.$$

Постоянная B окажется равной нулю, так как числитель в (51) при $\alpha = \pi i$ будет содержать косинусы от нечетного, кратного $\frac{\pi}{2}$. Определяем постоянную A :

$$\begin{aligned} A &= \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\operatorname{ch} \alpha - 1}{D} \left[1 + \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{\alpha + 1}{\alpha} - 2 \right) + 1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2 \alpha} \right] = \\ &= \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \lim_{\alpha \rightarrow 0} \frac{\frac{\alpha^2}{2} + \dots}{\left\{ n + 1 + n \left(\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} \frac{\alpha + 1}{\alpha} - 2 \right) + (n-1) \left(1 - \frac{\lambda_0^2}{\lambda^2 \alpha} \right) \right\} (\alpha^2 + \dots)} = \\ &= \frac{1}{2 \left(n + \frac{1}{\alpha} \right)}. \end{aligned}$$

Замечая далее, что

$$\operatorname{ch} \alpha - 1 = \frac{p^2}{2\lambda^2}, \quad \mu_p = \varphi_p(0) \frac{p^2}{\lambda^2} + \dot{\varphi}_p(0) \frac{p}{\lambda^2},$$

найдем теперь, что слагаемое, соответствующее нулевому корню в выражении $\Phi_{kp}(p)$, будет равно

$$\frac{1}{n + \frac{1}{\alpha}} \left[\varphi_p(0) + \frac{1}{p} \dot{\varphi}_p(0) \right].$$

¹ С. В. Biezeno und R. Grammel, Technische Dynamik, гл. XIII, § 2. См. также А. М. Кац, Некоторые новые формулы для расчёта крутильных колебаний валов многоцилиндровых двигателей. Прикл. матем. и механ., т. I, № 1, 1933, стр. 78—86.

Это же слагаемое в разложении $\Phi_k(p)$, даваемом выражением (49) (при сообщении начального возмущения маховику), будет

$$\frac{1}{n + \frac{1}{\kappa}} \left[\psi(0) + \frac{1}{p} \dot{\psi}(0) \right].$$

Складывая все эти выражения, получим:

$$\begin{aligned} & \frac{1}{n + \frac{1}{\kappa}} \left\{ \frac{1}{\kappa} \left[\psi(0) + \frac{1}{p} \dot{\psi}(0) \right] + \sum_{\rho=0}^{n-1} \left[\varphi_{\rho}(0) + \frac{1}{p} \dot{\varphi}_{\rho}(0) \right] \right\} \rightarrow \\ & \rightarrow \frac{1}{n + \frac{1}{\kappa}} \left\{ \left[\frac{\psi(0)}{\kappa} + \sum_{\rho=0}^{n-1} \varphi_{\rho}(0) \right] + \frac{1}{\kappa} \left[\dot{\psi}(0) + \sum_{\rho=0}^{n-1} \dot{\varphi}_{\rho}(0) \right] t \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом, нулевой корень уравнения (59) соответствует вращению вала с дисками и маховиком, как твердого тела. Если, например, всем массам сообщены одинаковые возмущения:

$$\psi(0) = \varphi_{\rho}(0) = \varphi(0), \quad \dot{\psi}(0) = \dot{\varphi}_{\rho}(0) = \dot{\varphi}(0),$$

то совокупность указанных слагаемых даёт

$$\varphi(t) = \varphi(0) + \dot{\varphi}(0) t,$$

как и должно быть.

Коэффициенты C_{σ} легко составляются, если вычислены корни β_k характеристического уравнения (52). Конечно, можно написать выражения этих коэффициентов в алгебраическом виде, предполагая β_k известным, и далее составить выражения для начальных функций $\varphi_k(t)$. Выписывать эти громоздкие формулы мы не станем. Вычисление упрощается в частном случае маховика бесконечно большой массы, т. е. если левый конец вала заделан.

Найдём движения дисков, предполагая, что заделанному концу вала сообщается поворот $\psi(0)$ и угловая скорость $\dot{\psi}(0)$.

При $I_0 \rightarrow \infty$ имеем

$$\frac{\lambda_0^2}{\lambda^2} = 0, \quad \frac{\lambda_0^2}{\kappa \lambda^2} = \frac{c_0}{c},$$

и выражение (50) примет вид:

$$D = \operatorname{sh} \alpha \left\{ [\operatorname{sh} (n+1) \alpha - \operatorname{sh} n \alpha] - \left(1 - \frac{c_0}{c}\right) [\operatorname{sh} n \alpha - \operatorname{sh} (n-1) \alpha] \right\}.$$

Пусть корни (чисто мнимые) этого уравнения будут $\alpha_\sigma = i\beta_\sigma$, где $\sigma = 1, 2, \dots, n$. По (49) имеем:

$$\begin{aligned} \Phi_k(p) &= \frac{c_0}{c} \left[\frac{p^2}{\lambda^2} \psi(0) + \frac{p}{\lambda^2} \dot{\psi}(0) \right] \frac{\operatorname{ch} \left(n - k + \frac{1}{2} \right) \alpha \operatorname{ch} \frac{\alpha}{2}}{D} = \\ &= \frac{c_0}{c} \left[\frac{p^2}{\lambda^2} \psi(0) + \frac{p}{\lambda^2} \dot{\psi}(0) \right] \left(\frac{A}{\operatorname{ch} \alpha - 1} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{B}{\operatorname{ch} \alpha + 1} + \sum_{\sigma=1}^n \frac{C_\sigma^{(k)}}{\operatorname{ch} \alpha - \cos \beta_\sigma} \right). \end{aligned}$$

Как выше указано, получаем:

$$A = \frac{1}{2} \frac{c}{c_0}, \quad B = 0.$$

Далее находим:

$$C_\sigma^{(k)} = \frac{1}{\Delta_\sigma} \cos \left(n - k + \frac{1}{2} \right) \beta_\sigma \cos \frac{\beta_\sigma}{2},$$

где обозначено

$$\begin{aligned} \Delta_\sigma &= (n+1) \cos (n+1) \beta_\sigma - n \cos n \beta_\sigma - \\ &- \left(1 - \frac{c_0}{c} \right) \left[n \cos n \beta_\sigma - (n-1) \cos (n-1) \beta_\sigma \right]. \end{aligned}$$

Заменяя теперь $\operatorname{ch} \alpha$ его значением, получаем:

$$\begin{aligned} \Phi_k(p) &= \psi(0) + \frac{\dot{\psi}(0)}{p} + 2 \frac{c_0}{c} \sum_{\sigma=1}^n \frac{C_\sigma^{(k)} [\psi(0) p^2 + \dot{\psi}(0) p]}{p^2 + \left[2\lambda \sin \frac{\beta_\sigma}{2} \right]^2} \rightarrow \\ &\rightarrow \psi(0) + \dot{\psi}(0) t + \frac{2c_0}{c} \sum_{\sigma=1}^n C_\sigma^{(k)} \left[\psi(0) \cos p_\sigma t + \frac{\dot{\psi}(0)}{p_\sigma} \sin p_\sigma t \right]. \end{aligned}$$

Слагаемое $\psi(0) + \dot{\psi}(0) t$ соответствует вращению всей системы вместе с заделанным сечением твёрдого тела.

Частоты главных колебаний (после того как корни β_σ найдены) определяются соотношением:

$$p_\sigma = 2\lambda \sin \frac{\beta_\sigma}{2}.$$

Амплитуды колебаний отдельных дисков при главном колебании частоты p_σ относятся как $\cos\left(n - k - \frac{1}{2}\right)\beta$, где k — номер диска.

§ 24. Продольное движение самолёта

1°. Мы рассматриваем продольное движение самолёта, происходящее при малом возмущении режима горизонтального прямолинейного по-

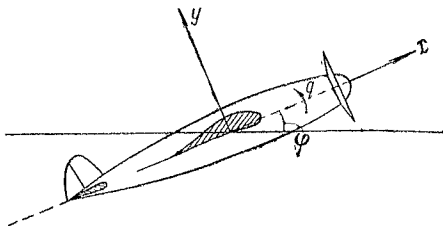


Рис. 49. Продольное движение самолёта. Расположение осей, связанных с самолётом.

лёта с постоянной скоростью. Уравнения продольного движения в безразмерной форме при пренебрежении некоторыми второстепенными величинами можно записать в форме: ¹

$$\dot{u}_1 = a_2 u_2 - \varphi,$$

$$\dot{u}_2 = 2u_1 + b_2 u_2 - q,$$

$$\dot{\varphi} = q,$$

$$\dot{q} = h_2 u_2 + h_0 q.$$

Здесь u_1 и u_2 — проекции на оси x и y (рис. 49) вариации вектора скорости, выраженные в безразмерной форме; φ — угол

¹ Р. Мизес, Теория полёта. Из-во иностр. л-ры, 1949, стр. 648.

тангажа; q — величина, пропорциональная угловой скорости тангажа; дифференцирование производится по безразмерному времени. Через a_2 , b_2 , h_2 , h_6 обозначены постоянные величины, вычисляемые по аэродинамическим характеристикам самолёта, скорости невозмущенного движения и радиусу инерции самолёта относительно оси, перпендикулярной его продольной плоскости симметрии (плоскости xu) и проходящей через центр тяжести самолёта. Коэффициенты a_2 , b_2 , h_6 отрицательны, коэффициент h_2 , пропорциональный мере продольной статической устойчивости самолёта, положителен, если самолёт статически устойчив.

Изображающая система уравнений будет:

$$\left. \begin{aligned} pU_1(p) &= a_2 U_2(p) - \Phi(p) + pu_{10}, \\ pU_2(p) &= 2U_1(p) + b_2 U_2(p) - Q(p) + pu_{20}, \\ p\Phi(p) &= Q(p) + p\varphi_0, \\ pQ(p) &= h_2 U_2(p) + h_6 Q(p) + pq_0. \end{aligned} \right\} \quad (4.53)$$

Определитель этой системы равен:

$$\Delta(p) = \begin{vmatrix} -p, & a_2, & -1, & 0 \\ 2, & b_2 - p, & 0, & -1 \\ 0, & 0, & -p, & 1 \\ 0, & h_2, & 0, & h_6 - p \end{vmatrix} =$$

$$= p^4 - (b_2 + h_6)p^3 + p^2(b_2 h_6 - 2a_2 + h_2) + 2a_2 h_6 p + 2h_2. \quad (4.54)$$

Все коэффициенты этого полинома положительны; все корни его будут иметь отрицательные вещественные части, если h_2 не будет превосходить некоторой предельной величины. Обычно полином $\Delta(p)$ имеет две пары комплексных сопряженных корней. Этот случай мы в дальнейшем будем рассматривать:

$$p_{1,2} = -\alpha_1 \pm i\beta_1, \quad p_{3,4} = -\alpha_2 \pm i\beta_2.$$

В динамике самолёта разработаны способы, позволяющие довольно быстро находить приближённые значения этих корней.

Чтобы придать последующим записям более компактную форму, введём новые наименования искомым величин:

$$u_1 = x_1, \quad u_2 = x_2, \quad \varphi = x_3, \quad q = x_4,$$

и, как в § 9 — 13, будем обозначать через $\Delta_{ik}(p)$ алгебраическое дополнение элемента i строки k столбца определителя (54). Тогда по (53) получим:

$$X_s(p) = -p \sum_{k=1}^4 x_k^0 \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)} \rightarrow x_s(t). \quad (4.55)$$

Применение второй теоремы разложения приводит к громоздким вычислениям с комплексными числами. Некоторого упрощения можно достигнуть, представляя полином $\Delta(p)$ в виде:

$$\Delta(p) = (p^2 + 2\alpha_1 p + \alpha_1^2 + \beta_1^2) (p^2 + 2\alpha_2 p + \alpha_2^2 + \beta_2^2)$$

и разыскивая разложение отношений $\frac{\Delta_{ik}(p)}{\Delta(p)}$ на простейшие дроби в форме:

$$\frac{\Delta_{ik}(p)}{\Delta(p)} = \frac{A_{ik}^{(1)}p + B_{ik}^{(1)}}{p^2 + 2\alpha_1 p + \alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{A_{ik}^{(2)}p + B_{ik}^{(2)}}{p^2 + 2\alpha_2 p + \alpha_2^2 + \beta_2^2}. \quad (4.56)$$

Речь идёт, таким образом, о представлении дроби

$$\frac{a_0 p^3 + a_1 p^2 + a_2 p + a_3}{\Delta(p)}$$

в форме

$$\frac{A^{(1)}p + B^{(1)}}{p^2 + 2\alpha_1 p + \alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{A^{(2)}p + B^{(2)}}{p^2 + 2\alpha_2 p + \alpha_2^2 + \beta_2^2}.$$

Заметим, что коэффициент a_0 при $i \neq k$ равен нулю, он равен (-1) при $i = k$.

Разыскивая $A^{(1)}, \dots, B^{(2)}$ методом неопределённых коэффициентов, получаем систему четырёх уравнений:

$$A^{(1)} + A^{(2)} = a_0 \quad (1)$$

$$2\alpha_2 A^{(1)} + 2\alpha_1 A^{(2)} + B^{(1)} + B^{(2)} = a_1 \quad (2)$$

$$(\alpha_2^2 + \beta_2^2) A^{(1)} + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) A^{(2)} + 2\alpha_2 B^{(1)} + 2\alpha_1 B^{(2)} = a_2 \quad (3)$$

$$(\alpha_2^2 + \beta_2^2) B^{(1)} + (\alpha_1^2 + \beta_1^2) B^{(2)} = a_3 \quad (4)$$

Первое уравнение не содержит неизвестных $B^{(1)}$, $B^{(2)}$, а последнее — неизвестных $A^{(1)}$, $A^{(2)}$. Поэтому решение можно упростить, применив способ множителей.¹

Вводим неопределённые множители λ_1 , λ_2 , μ_1 , μ_2 и составляем комбинации:

$$\left. \begin{aligned} (2) \lambda_1 + (3) \lambda_2 + (1) &= \lambda_1 \alpha_1 + \lambda_2 \alpha_2 + \alpha_0, \\ (2) \mu_1 + (3) \mu_2 + (4) &= \mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \alpha_3. \end{aligned} \right\} \quad (4.57)$$

Выбрав λ_1 и λ_2 так, чтобы первое из этих уравнений не содержало $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$, решаем его совместно с (4) относительно неизвестных $B^{(1)}$, $B^{(2)}$. Выбираем также μ_1 и μ_2 , чтобы второе уравнение (57) не содержало $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$, после чего решаем его совместно с (1) относительно $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$.

Множители λ при этом приходится находить из уравнений:

$$2\alpha_2\lambda_1 + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)\lambda_2 = 1,$$

$$2\alpha_1\lambda_1 + (\alpha_1^2 + \beta_1^2)\lambda_2 = 1,$$

а множители μ — из уравнений:

$$\mu_1 + 2\alpha_2\mu_2 + \alpha_2^2 + \beta_2^2 = 0,$$

$$\mu_1 + 2\alpha_1\mu_2 + \alpha_1^2 + \beta_1^2 = 0.$$

Для нахождения неизвестных $B^{(1)}$ и $B^{(2)}$ имеем (4) и уравнение

$$(\lambda_1 + 2\alpha_2\lambda_2) B^{(1)} + (\lambda_1 + 2\alpha_1\lambda_2) B^{(2)} = \lambda_1\alpha_1 + \lambda_2\alpha_2 + \alpha_0,$$

а для нахождения $A^{(1)}$ и $A^{(2)}$ — уравнение (1) и

$$\begin{aligned} [2\alpha_2\mu_1 + (\alpha_2^2 + \beta_2^2)\mu_2] A^{(1)} + [2\alpha_1\mu_1 + (\alpha_1^2 + \beta_1^2)\mu_2] A^{(2)} = \\ = \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \alpha_3. \end{aligned}$$

По этому способу вместо системы четырёх уравнений приходится решать четыре системы по два уравнения, что менее громоздко.

¹ См., например, А. Н. Крылов, Собр. соч., т. X, 1948, стр. 311—313.

Имея теперь в виду соотношение:

$$\frac{(Ap + B)p}{p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2} = \frac{A(p + \alpha)p + (B - A\alpha)p}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} \div \rightarrow \\ \div \rightarrow e^{-\alpha t} \left[A \cos \beta t + \frac{1}{\beta} (B - A\alpha) \sin \beta t \right],$$

получаем по (55) и (56):

$$x_s(t) = - \sum_{k=1}^4 x_k^0 \left\{ e^{-\alpha_1 t} \left[A_{ks}^{(1)} \cos \beta_1 t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\beta_1} (B_{ks}^{(1)} - A_{ks}^{(1)} \alpha_1) \sin \beta_1 t \right] + e^{-\alpha_2 t} \left[A_{ks}^{(2)} \cos \beta_2 t + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{\beta_2} (B_{ks}^{(2)} - A_{ks}^{(2)} \alpha_2) \sin \beta_2 t \right] \right\}, \quad (4.58)$$

где $s = 1, 2, 3, 4$.

Этот ход вычисления, повидимому, наиболее экономно ведёт к цели — нахождению параметров продольного движения самолёта при произвольном начальном возмущении.

Если ввести обозначения:

$$C_s^{(\sigma)} = - \sum_{k=1}^4 x_k^0 A_{ks}^{(\sigma)}, \quad D_s^{(\sigma)} = - \frac{1}{\beta_\sigma} \sum_{k=1}^4 x_k^0 B_{ks}^{(\sigma)} - \frac{\alpha_\sigma}{\beta_\sigma} C_s^{(\sigma)}, \quad (4.59)$$

где $\sigma = 1, 2$, то можно также записать (58) в форме:

$$x_s(t) = e^{-\alpha_1 t} (C_s^{(1)} \cos \beta_1 t + D_s^{(1)} \sin \beta_1 t) + \\ + e^{-\alpha_2 t} (C_s^{(2)} \cos \beta_2 t + D_s^{(2)} \sin \beta_2 t). \quad (4.60)$$

2°. Рассмотрим теперь вынужденные колебания.¹ В правые части уравнений продольного движения войдут свободные члены, в соответствии с чем изображающая

¹ Я. Г. Пановко и Н. П. Борисов, Основы теории плоских вынужденных колебаний самолёта. Труды Ленингр. военно-воздушной академии, № 4, 1943, стр. 28—47.

система (53) (полагаем теперь, что начальные возмущения отсутствуют) примет вид:

$$\left. \begin{aligned} pU_1(p) &= a_2 U_2(p) - \Phi(p) + F_1(p), \\ pU_2(p) &= 2U_1(p) + b_2 U_2(p) - Q(p) + F_2(p), \\ p\Phi(p) &= Q(p), \\ p(p) &= h_2 U_2(p) + h_6 Q(p) + F_4(p), \end{aligned} \right\} \quad (4.61)$$

где $F_1(p) \xrightarrow{\cdot} f_1(t)$, $F_2(p) \xrightarrow{\cdot} f_2(t)$, $F_4(p) \xrightarrow{\cdot} m(t)$ — изображения проекций главного вектора возмущающих сил на оси x и y и момента их относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости симметрии самолёта. В третье кинематическое уравнение, выражающее связь угла тангажа с угловой скоростью, конечно, силы не входят.

Подобно (55), получаем:

$$X_s(p) = - \sum_{k=1}^4 F_k(p) \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)}, \quad (4.62)$$

если условимся считать $F_3(p) = 0$. Начальные функции можно получить, применив теорему свёртывания. По (58) получим:

$$\begin{aligned} x_s(t) = & - \sum_{k=1}^4 \left\{ e^{-\alpha_1 t} \int_0^t e^{\alpha_1 \tau} \left[A_{ks}^{(1)} \cos \beta_1(t - \tau) + \right. \right. \\ & + \frac{1}{\beta_1} (B_{ks}^{(1)} - A_{ks}^{(1)} \alpha_1) \sin \beta_1(t - \tau) \left. \right] f_k(\tau) d\tau + \\ & + e^{\alpha_2 t} \int_0^t e^{\alpha_2 \tau} \left[A_{ks}^{(2)} \cos \beta_2(t - \tau) + \right. \\ & + \frac{1}{\beta_2} (B_{ks}^{(2)} - A_{ks}^{(2)} \alpha_2) \sin \beta_2(t - \tau) \left. \right] f_k(\tau) d\tau \left. \right\}. \quad (4.63) \end{aligned}$$

Применение теоремы свёртывания, конечно, не обязательно. Пусть, например, возмущающие силы постоянны. Начальная

функция для изображения (56) находится по V табл. 2:

$$\begin{aligned} \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)} \rightarrow & \frac{A_{ks}^{(1)}}{\beta_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \beta_1 t + \frac{B_{ks}^{(1)}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[1 - \right. \\ & \left. - e^{-\alpha_1 t} \left(\cos \beta_1 t + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 t \right) \right] + \frac{A_{ks}^{(2)}}{\beta_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \beta_2 t + \\ & + \frac{B_{ks}^{(2)}}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \left[1 - e^{-\alpha_2 t} \left(\cos \beta_2 t + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 t \right) \right], \end{aligned}$$

так что продольное движение самолёта при действии постоянных сил будет:

$$\begin{aligned} x_s(t) = & - \sum_{k=1}^4 f_k \left\{ \frac{A_{ks}^{(1)}}{\beta_1} e^{-\alpha_1 t} \sin \beta_1 t + \frac{B_{ks}^{(1)}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} \left[1 - \right. \right. \\ & \left. - e^{-\alpha_1 t} \left(\cos \beta_1 t + \frac{\alpha_1}{\beta_1} \sin \beta_1 t \right) \right] + \frac{A_{ks}^{(2)}}{\beta_2} e^{-\alpha_2 t} \sin \beta_2 t + \\ & \left. + \frac{B_{ks}^{(2)}}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \left[1 - e^{-\alpha_2 t} \left(\cos \beta_2 t + \frac{\alpha_2}{\beta_2} \sin \beta_2 t \right) \right] \right\}, \quad (4.64) \end{aligned}$$

причём $f_3 = 0$.

При $t \rightarrow \infty$ отсюда получаем значения параметров в новом установившемся режиме продольного движения:

$$x_s(\infty) = - \sum_{k=1}^4 f_k \left(\frac{B_{ks}^{(1)}}{\alpha_1^2 + \beta_1^2} + \frac{B_{ks}^{(2)}}{\alpha_2^2 + \beta_2^2} \right). \quad (4.65)$$

Эти же значения можно было бы получить непосредственно по изображениям (62) [в которых нужно заменить $F_k(p)$ постоянными f_k]. Действительно, если все корни знаменателя $\Delta(p)$ имеют отрицательные вещественные части, то из второй теоремы разложения следует, что значение начальной функции при $t \rightarrow \infty$ равно постоянному слагаемому в разложении изображения на простейшие дроби. Поэтому

$$x_s(\infty) = - \sum_{k=1}^4 f_k \frac{\Delta_{ks}(0)}{\Delta(0)}. \quad (4.66)$$

Тождественность выражений (65) и (66) следует из того что

$$(\alpha_1^2 + \beta_1^2)(\alpha_2^2 + \beta_2^2) = \Delta(0),$$

и из уравнения (4), которое служило для определения величин $B_{ks}^{(1)}$ и $B_{ks}^{(2)}$, так как α_3 есть не что иное как $\Delta_{ks}(0)$.

3°. Разыскание режима переодических движений самолёта при действии на него периодических сил производится по методу § 13. Пусть период возмущающих сил будет T . Можем написать

$$F_k(p) = \frac{G_k(p)}{1 - e^{-pT}},$$

где, как многократно объяснялось, $G_k(p) \rightarrow g_k(t)$ представляют изображения функций, равных нулю при $t > T$ и равных $f_k(t)$ при $0 < t < T$.

Изображающая система уравнений будет по (55) и (66):

$$X_s(p) = -\frac{p}{1 - e^{-pT}} \sum_{k=1}^4 \left[x_k^0 (1 - e^{-pT}) + \frac{G_k(p)}{p} \right] \frac{\Delta_{ks}(p)}{\Delta(p)} = \frac{\Theta_s(p)}{1 - e^{-pT}}, \quad (4.67)$$

и для разыскания периодического режима нужно так подобрать начальные данные x_k^0 , чтобы начальные функции $\vartheta_s(t) \leftarrow \Theta_s(p)$ обращалась тождественно в нуль при $t > T$.

Рассмотрим частный случай действия периодических импульсов, что, например, соответствует действию сил отдачи от периодически повторяющихся выстрелов. Отнесенные к единице массы проекции импульса на оси x и y обозначим I_1 и I_2 , а момент импульса относительно центральной оси, перпендикулярной плоскости xu , отнесенной к единице момента инерции самолёта относительно этой оси, назовём I_4 ; $I_3 = 0$. Имеем:

$$G_k(p) = pI_k \rightarrow I_k \sigma_1(t)$$

и, обозначив аналогично (59) через $E_s^{(\sigma)}$, $F_s^{(\sigma)}$ нам известные величины

$$E_s^{(\sigma)} = -\sum_{k=1}^4 I_k A_{ks}^{(\sigma)}, \quad F_s^{(\sigma)} = -\sum_{k=1}^4 I_k B_{ks}^{(\sigma)} - \frac{\alpha_\sigma}{\beta_\sigma} A_{4s}^{(\sigma)}, \quad (4.68)$$

где $\sigma = 1, 2$, а $s = 1, 2, 3, 4$, получим по (60) при $t > T$:

$$\begin{aligned} \vartheta_s(t) = & e^{-\alpha_s t} \{ C_s^{(1)} [\cos \beta_1 t - e^{\alpha_1 T} \cos \beta_1 (t-T)] + D_s^{(1)} [\sin \beta_1 t - \\ & - e^{\alpha_1 T} \sin \beta_1 (t-T)] + E_s^{(1)} \cos \beta_1 t + F_s^{(1)} \sin \beta_1 t \} + \\ & + e^{-\alpha_s t} \{ C_s^{(2)} [\cos \beta_2 t - e^{\alpha_2 T} \cos \beta_2 (t-T)] + D_s^{(2)} [\cos \beta_2 t - \\ & - e^{\alpha_2 T} \sin \beta_2 (t-T)] + E_s^{(2)} \cos \beta_2 t + F_s^{(2)} \sin \beta_2 t \}. \end{aligned}$$

Нужно приравнять нулю коэффициенты при $e^{-\alpha_s t} \cos \beta_s t$, $e^{-\alpha_s t} \sin \beta_s t$. Получаем уравнения для нахождения $C_s^{(\sigma)}$, $D_s^{(\sigma)}$:

$$\begin{aligned} C_s^{(\sigma)} (1 - e^{\alpha_s T} \cos \beta_s T) + D_s^{(\sigma)} e^{\alpha_s T} \sin \beta_s T + E_s^{(\sigma)} &= 0; \\ -C_s^{(\sigma)} e^{\alpha_s T} \sin \beta_s T + D_s^{(\sigma)} (1 - e^{\alpha_s T} \cos \beta_s T) + F_s^{(\sigma)} &= 0. \end{aligned}$$

Из них находим

$$\left. \begin{aligned} C_s^{(\sigma)} &= -E_s^{(\sigma)} \frac{e^{-\alpha_s T} - \cos \beta_s T}{2(\operatorname{ch} \alpha_s T - \cos \beta_s T)} + F_s^{(\sigma)} \frac{\sin \beta_s T}{2(\operatorname{ch} \alpha_s T - \cos \beta_s T)}, \\ D_s^{(\sigma)} &= -E_s^{(\sigma)} \frac{\sin \beta_s T}{2(\operatorname{ch} \alpha_s T - \cos \beta_s T)} - F_s^{(\sigma)} \frac{e^{-\alpha_s T} - \cos \beta_s T}{2(\operatorname{ch} \alpha_s T - \cos \beta_s T)}. \end{aligned} \right\} (4.69)$$

Искомое периодическое движение при $t < T$ даётся выражениями:

$$\begin{aligned} \vartheta_s(t) = x_s(t) = & e^{-\alpha_s t} [(C_s^{(1)} + E_s^{(1)}) \cos \beta_1 t + \\ & + (D_s^{(1)} + F_s^{(1)}) \sin \beta_1 t] + e^{-\alpha_s t} [(C_s^{(2)} + E_s^{(2)}) \cos \beta_2 t + \\ & + (D_s^{(2)} + F_s^{(2)}) \sin \beta_2 t], \end{aligned}$$

откуда, подставив приведённые выше значения $C_s^{(\sigma)}$, $D_s^{(\sigma)}$, найдём после некоторых упрощений:

$$\begin{aligned} x_s(t) = & \sum_{\sigma=1}^2 \left\{ \frac{e^{\alpha_s (T-t)}}{2(\operatorname{ch} \alpha_s T - \cos \beta_s T)} (E_s^{(\sigma)} \cos \beta_s t + F_s^{(\sigma)} \sin \beta_s t) + \right. \\ & + \frac{e^{-\alpha_s t}}{2(\operatorname{ch} \alpha_s T - \cos \beta_s T)} [-E_s^{(\sigma)} \cos \beta_s (T-t) + \\ & \left. + F_s^{(\sigma)} \sin \beta_s (T-t)] \right\}. \quad (4.70) \end{aligned}$$

Эти формулы пригодны для вычисления движения только при $t < T$. Значения $x_s(t)$ при $t > T$ находим по условию периодичности этих величин; можно, например, построив по (70)

графики $x_s(t)$ при $0 < t < T$, продолжать их в следующие интервалы времени $(T, 2T)$, $(2T, 3T)$ и т. д.

Из (70) получаем:

$$x_s(0) = x_s(T+0) = \sum_{\sigma=1}^2 \left[E_s^{(\sigma)} \frac{e^{\alpha_\sigma T} - \cos \beta_\sigma T}{2(\operatorname{ch} \alpha_\sigma T - \cos \beta_\sigma T)} + \right. \\ \left. + F_s^{(\sigma)} \frac{\sin \beta_\sigma T}{2[\operatorname{ch} \alpha_\sigma T - \cos \beta_\sigma T]} \right],$$

$$x_s(T-0) = \sum_{\sigma=1}^2 \left[E_s^{(\sigma)} \frac{\cos \beta_\sigma T - e^{-\alpha_\sigma T}}{2(\operatorname{ch} \alpha_\sigma T - \cos \beta_\sigma T)} + \right. \\ \left. + F_s^{(\sigma)} \frac{\sin \beta_\sigma T}{2(\operatorname{ch} \alpha_\sigma T - \cos \beta_\sigma T)} \right].$$

Таким образом, в моменты сообщения импульсов наши переменные претерпевают разрыв непрерывности:

$$x_s(T+0) - x_s(T-0) = \sum_{\sigma=1}^2 E_s^{(\sigma)} = - \sum_{k=1}^4 I_k (A_{ks}^{(1)} + A_{ks}^{(2)}).$$

Вспомним теперь, что величины $A_{ks}^{(1)}$, $A_{ks}^{(2)}$ определялись системой уравнений (1) — (4), причём из первого уравнения этой системы следует, что

$$A_{ks}^{(1)} + A_{ks}^{(2)} = \alpha_0 = \begin{cases} 0 & \text{при } k \neq s, \\ -1 & \text{„ } k = s. \end{cases}$$

Находим поэтому

$$x_s(T+0) - x_s(T-0) = I_s,$$

причём $I_s = 0$. Получили ожидаемый результат: в моменты сообщения импульсов проекции скорости самолёта $x_1 = u_1$, $x_2 = u_2$ и его угловая скорость $x_4 = q$ изменяются скачкообразно на величины соответствующих импульсов, тогда как угол тангажа $x_3 = \varphi$, конечно, остаётся непрерывным.

ГЛАВА V

МЕХАНИЧЕСКИЕ СИСТЕМЫ С БЕСКОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ СТЕПЕНЕЙ СВОБОДЫ

§ 25. Колебания струны. Продольные колебания стержня

1°. Натянутая струна, края которой закреплены, выводится из положения равновесия путём сообщения её точкам начальных отклонений и начальных скоростей. Через $v(x, t)$ обозначим отклонение в момент времени t точки струны с абсциссой x ; известно, что $v(x, t)$ определяется дифференциальным уравнением в частных производных

$$c^2 v''(x, t) = \ddot{v}(x, t), \quad (5.1)$$

где штрихами обозначено дифференцирование по x , точками — по t ; $c^2 = \frac{T}{\rho}$, где T — постоянное натяжение струны, ρ — масса единицы её длины; c представляет, как мы увидим далее, скорость распространения по струне поперечных возмущений.

Дифференциальное уравнение (1) должно определить функцию $v(x, t)$ для $0 \leq x \leq l$ и для любого момента времени t . К нему присоединяются, во-первых, краевые условия: при $x = 0$ и при $x = l$ и при любом t имеем $v = 0$ или

$$v(0, t) = 0, \quad v(l, t) = 0. \quad (5.2)$$

Во-вторых, имеем начальные условия, выражающие задание отклонения точек струны и их скоростей в момент времени $t = 0$:

$$v(x, 0) = f(x), \quad \dot{v}(x, 0) = g(x). \quad (5.3)$$

Будем считать $f(x)$ и $g(x)$ непрерывными функциями, заданными в интервале $(0, l)$ и в соответствии с (2) обращающимися в нуль на концах этого интервала.

Пусть

$$V(x, p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} v(x, t) dt \rightarrow v(x, t) \quad (5.4)$$

представляет изображение искомой функции. Из (2) следует, что при $x=0$ и $x=l$ интеграл Лапласа в (4) обращается в нуль, т. е.

$$V(0, p) = 0, \quad V(l, p) = 0. \quad (5.5)$$

Имеем далее по (3):

$$\begin{aligned} \dot{v}(x, t) &\leftarrow pV(x, p) - pv(x, 0) = pV(x, p) - pf(x), \\ \ddot{v}(x, t) &\leftarrow p^2V(x, p) - p^2f(x) - pg(x). \end{aligned}$$

Дифференцируя далее интеграл Лапласа дважды по параметру x , получаем:

$$V''(x, p) = p \int_0^{\infty} e^{-pt} v''(x, t) dt \rightarrow v''(x, t).$$

Здесь предположено, что функция $e^{-pt}v(x, t)$ удовлетворяет условиям, при которых возможна перемена порядка интегрирования по t дифференцирования по x .

Изображающее уравнение для (1) будет:

$$V''(x, p) - \frac{p^2}{c^2} V(x, p) = -\frac{p^2}{c^2} f(x) - \frac{p}{c^2} g(x). \quad (5.6)$$

Для струны с сосредоточенными массами (§ 22) мы получили разностное уравнение; естественно, что при переходе к струне с непрерывно распределённой массой разностное уравнение перешло в дифференциальное.

Построение решения для любых законов и задания начального отклонения $f(x)$ и начальной скорости $g(x)$ не очень значительно осложнило бы ход рассуждений и вычислений; ограничимся, однако, рассмотрением частного случая, так как

преимущество операционного метода при этом становится более наглядным. Полагаем

$$\left. \begin{aligned} f(x) &= \begin{cases} \frac{v_0 x}{b} & 0 \leq x \leq b \\ \frac{v_0 (l-x)}{l-b} & b \leq x \leq l \end{cases} \\ g(x) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (5.7)$$

т. е. примем, что в начальном состоянии струны точке $x=b$ сообщается отклонение v_0 от положения равновесия, тогда ветви $0 \leq x \leq b$ и $b \leq x \leq l$ расположатся по отрезкам прямых, уравнения которых приведены выше.

Разностное уравнение в § 22 решалось средствами операционного исчисления; естественно и здесь применить те же средства. Нужно теперь составить изображающее уравнение по переменной x ; полагаем

$$V(x, p) \dashrightarrow \psi(r) = r \int_0^{\infty} V(x, p) e^{-\omega r} dx.$$

Конечно, $\psi(r)$ параметрически зависит от p ; далее имеем по (5):

$$\begin{aligned} V''(x, p) \dashrightarrow r^2 \psi(r) - r^2 V(0, p) - r V'(0, p) = \\ = r^2 \psi(r) - r V'(0, p). \end{aligned}$$

По табл. 3 изображений имеем (рис. 12,5):

$$f(x) \dashrightarrow \frac{v_0}{r} \left[(1 - e^{-rb}) \frac{1}{b} - \frac{e^{-rb} - e^{-rl}}{l-b} \right],$$

и изображающее уравнение для (6) будет:

$$\psi(r) \left(r^2 - \frac{p^2}{c^2} \right) = r V'(0, p) - \frac{p^2 v_0}{c^2 r} \left[(1 - e^{-rb}) \frac{1}{b} - \frac{e^{-rb} - e^{-rl}}{l-b} \right].$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{r}{r^2 - \frac{p^2}{c^2}} \dashrightarrow \frac{c}{p} \operatorname{sh} \frac{px}{c}, \\ - \frac{p^2}{c^2} \frac{1}{r \left(r^2 - \frac{p^2}{c^2} \right)} = \frac{1}{r} - \frac{r}{r^2 - \frac{p^2}{c^2}} \dashrightarrow x - \frac{c}{p} \operatorname{sh} \frac{px}{c}, \end{aligned}$$

и, значит:

$$V(x, p) = \frac{c}{p} V'(0, p) \operatorname{sh} \frac{px}{c} + \begin{cases} \frac{v_0 x}{b} - \frac{v_0 c}{bp} \operatorname{sh} \frac{px}{c} & 0 \leq x \leq b \\ \frac{v_0(l-x)}{l-b} - \frac{v_0 c}{bp} \operatorname{sh} \frac{px}{c} + \\ + \frac{cv_0}{pb(l-b)} \operatorname{sh} \frac{p(x-b)}{c} & b \leq x \leq l \end{cases}$$

По второму условию (5) теперь определяем $V'(0, p)$:

$$V'(0, p) = \frac{v_0}{b} - \frac{v_0 l}{b(l-b)} \cdot \frac{\operatorname{sh} \frac{p(l-b)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{pl}{c}}.$$

Подстановка даёт теперь:
при $0 \leq x \leq b$

$$V(x, p) = \frac{v_0 x}{b} - \frac{v_0 lc}{b(l-b)p} \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{c} \operatorname{sh} \frac{p(l-b)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{pl}{c}} \quad (5.8)$$

и при $b \leq x \leq l$

$$V(x, p) = \frac{v_0(l-x)}{l-b} - \frac{cv_0 l}{pb(l-b)} \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{c} \operatorname{sh} \frac{p(l-b)}{c} - \operatorname{sh} \frac{pl}{c} \operatorname{sh} \frac{p(x-b)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{pl}{c}}.$$

Имея в виду, что

$$\operatorname{sh} \frac{px}{c} \operatorname{sh} \frac{p(l-b)}{c} - \operatorname{sh} \frac{pl}{c} \operatorname{sh} \frac{p(x-b)}{c} = \operatorname{sh} \frac{p(l-x)}{c} \operatorname{sh} \frac{pb}{c},$$

можем также написать при $b \leq x \leq l$:

$$V(x, p) = \frac{v_0(l-x)}{l-b} - \frac{cv_0 l}{p(l-b)b} \frac{\operatorname{ch} \frac{p(l-x)}{c} \operatorname{sh} \frac{pb}{c}}{\operatorname{sh} \frac{pl}{c}}. \quad (5.9)$$

Имеем:

$$\frac{c}{p} \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{c} \operatorname{sh} \frac{p(l-b)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{pl}{c}} = \frac{1}{2 \left(1 - e^{-\frac{2pl}{a}} \right)} \frac{c}{p} \left[e^{-\frac{p}{a}(b-x)} - e^{-\frac{p}{a}(b+x)} - \right. \\ \left. - e^{-\frac{p}{a}(2l-b-x)} + e^{-\frac{p}{a}(2l-b+x)} \right] = \frac{G_1(p)}{2 \left(1 - e^{-\frac{2pl}{a}} \right)}; \quad (5.10)$$

$$\frac{c}{p} \frac{\operatorname{sh} \frac{pb}{c} \operatorname{sh} \frac{p(l-x)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{pl}{c}} = \\ = \frac{1}{2 \left(1 - e^{-\frac{2pl}{a}} \right)} \frac{c}{p} \left[e^{-\frac{p}{a}(x-b)} - e^{-\frac{p}{a}(x+b)} - \right. \\ \left. - e^{-\frac{p}{a}(2l-b-x)} + e^{-\frac{p}{a}(2l-b+x)} \right] = \frac{G_2(p)}{2 \left(1 - e^{-\frac{2pl}{a}} \right)}. \quad (5.11)$$

Не нарушая общности, можно считать, что $b \leq \frac{l}{2}$. Пусть $x \leq b$, введём обозначения:

$$t_1 = \frac{b-x}{c}, \quad t_2 = \frac{b+x}{c}, \quad t_3 = \frac{2l-b-x}{c}, \quad t_4 = \frac{2l-b+x}{c}.$$

Очевидно, что $t_1 \leq t_2 \leq t_3 \leq t_4$. По теореме запаздывания получаем:

$$\left. \begin{array}{ll} G_1(p) \rightarrow 0 & \text{при } t \leq t_1 \\ \text{„ } c(t-t_1) & \text{„ } t_1 \leq t \leq t_2 \\ \text{„ } c(t_2-t_1) = 2x & \text{„ } t_2 \leq t \leq t_3 \\ \text{„ } c(t_2-t_1) - c(t-t_3) & \text{„ } t_3 \leq t \leq t_4 \\ \text{„ } c(t_2-t_1 + t_3-t_4) = 0 & \text{„ } t_4 \leq t \end{array} \right\} \quad (5.12)$$

Таким образом начальная функция $g_1(t) \leftarrow G_1(p)$ при $t \geq t_4$, а значит и при $t > 2l$, обращается в нуль. Это

позволяет утверждать, что начальная функция для изображения

$$\frac{G_1(p)}{1 - e^{-\frac{2pl}{c}}}$$

является периодической и имеющей период $\frac{2l}{c}$. Такое же вычисление показывает, что периодической с периодом $\frac{2l}{c}$ является также начальная функция для изображения

$$\frac{G_2(p)}{1 - e^{-\frac{2pl}{c}}}.$$

Из сказанного следует, что движение струны будет периодическим с указанным периодом. Достаточно поэтому рассмотреть движение для промежутка времени $0 \leq t \leq \frac{2l}{c}$.

Возвращаясь к (8) и (10), имеем при $0 \leq x \leq b$ и $ct \leq 2l$:

$$V(x, p) = \frac{v_0 x}{b} - \frac{1}{2} \frac{v_0 l}{b(l-b)} (e^{-pt_1} - e^{-pt_2} - e^{-pt_3} + e^{-pt_4}) \frac{c}{p}.$$

По теореме запаздывания (12) получим:

$$\left. \begin{aligned} v(x, t) &= \frac{v_0 x}{b} && \text{при } 0 \leq t \leq t_1 \\ &= \frac{v_0 x}{b} - \frac{1}{2} \frac{v_0 l}{b(l-b)} c(t - t_1) = \frac{v_0 l}{b(l-b)} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{l} \right) x - \frac{1}{2} (ct - b) \right] && \text{при } t_1 \leq t \leq t_2 \\ &= \frac{v_0 x}{b} - \frac{v_0 l x}{b(l-b)} = -\frac{v_0 x}{l-b} && \text{при } t_2 \leq t \leq t_3 \\ &= -\frac{v_0 x}{l-b} + \frac{1}{2} \frac{v_0 l}{b(l-b)} (ct - 2l + b + x) = \\ &= \frac{v_0 l}{b(l-b)} \left[\left(\frac{1}{2} - \frac{b}{l} \right) x + \frac{1}{2} (ct + b) - l \right] && \text{при } t_3 \leq t \leq t_4 \\ &= \frac{v_0 x}{b} && \text{при } t_4 \leq t \leq 2 \frac{l}{c} \end{aligned} \right\} \quad (5.13)$$

Поясним эти результаты. Рассматриваемый участок струны $0 \leq x \leq b$ разобьём сначала на две области: первую, в которой $0 \leq x \leq b - ct$, и вторую, в которой $b - ct \leq x \leq b + ct$; в первой области $t \leq t_1$ и по первой формуле (13) смещение v сохраняет начальное значение, т. е. возмущение, распространяющееся со скоростью c , еще не достигло точек этой области. Во второй области $t \geq t_1$ и пока $t \leq t_2$, т. е. $ct \leq b + x$, в ней смещение точек струны даётся вторым выражением (13); это разделение рассматриваемого участка струны на две области будет иметь место, пока $ct \leq b$; если же $b \leq ct \leq b + x$, то $t_1 \leq t \leq t_2$, и все точки нашего участка будут смещены сообразно второму выражению (13). Пусть t увеличивается, оставаясь меньше t_3 ; участок струны $(0, b)$ снова разобьётся на два участка; в одном из них $x \geq ct - b$, в другом $x \leq ct - b$. В первом из них всё ещё $t_1 \leq t \leq t_2$ и $v(x, t)$ даётся вторым выражением (13). Во втором участке $t_2 \leq t \leq t_3$ и v определяется по третьему выражению (13) и т. д. Аналогичное исследование этим же путём проводится для последующих промежутков времени. При $ct = 2l$, как выше указывалось, весь участок $(0, b)$ вернётся к исходному состоянию, и процесс начнётся снова.

Переходим к участку $b \leq x \leq l$. Нужно разбить его на две области:

$$\text{а) } b \leq x \leq l - b; \quad \text{б) } l - b \leq x \leq l.$$

В области а) полагаем:

$$t'_1 = \frac{x - b}{c}, \quad t'_2 = t_2 = \frac{x + b}{c}, \quad t'_3 = t_3 = \frac{2l - x - b}{c},$$

$$t'_4 = \frac{2l + b - x}{c},$$

причём $t'_1 \leq t'_2 \leq t'_3 \leq t'_4$. По (9) и (11) имеем:

$$V(x, p) = \frac{v_0(l - x)}{l - b} -$$

$$- \frac{1}{2} \frac{v_0 l}{b(l - b)} (e^{-pt'_1} - e^{-pt'_2} - e^{-pt'_3} + e^{-pt'_4})^c_p, \quad (5.14)$$

и по теореме запаздывания получим при $b \leq x \leq l - b$:

$$\left. \begin{aligned} v(x, t) &= \frac{v_0(l-x)}{l-b} && \text{при } 0 \leq t \leq t'_1 \\ & \text{" } \frac{v_0 l}{b(l-b)} \left[x \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{l} \right) - \frac{1}{2} (ct - b) \right] && \text{при } t'_1 \leq t \leq t'_2 \\ & \text{" } - \frac{v_0 x}{l-b} && \text{" } t'_2 \leq t \leq t'_3 \\ & \text{" } \frac{v_0 l}{b(l-b)} \left[x \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{l} \right) + \frac{1}{2} (ct + b) - l \right] && \text{при } t'_3 \leq t \leq t'_4 \\ & \text{" } \frac{v_0(l-x)}{l-b} && \text{" } t'_4 \leq t \leq \frac{2l}{c} \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

В области б) надо принять:

$$t''_1 = t'_1, \quad t''_2 = t'_3 = \frac{2l - x - b}{c}, \quad t''_3 = t'_2 = \frac{b + x}{c}, \quad t''_4 = t'_4,$$

где снова $t'_1 \leq t''_2 \leq t''_3 \leq t'_4$.

Производя соответствующие замены в (14), получим теперь по теореме запаздывания при $l - b \leq x \leq l$:

$$\left. \begin{aligned} v(x, t) &= \frac{v_0(l-x)}{l-b} && \text{при } 0 \leq t \leq t''_1 \\ & \text{" } \frac{v_0 l}{b(l-b)} \left[x \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{l} \right) - \frac{1}{2} (ct - b) \right] && \text{при } t''_1 \leq t \leq t''_2 \\ & \text{" } - \frac{v_0(l-x)}{b} && \text{" } t''_2 \leq t \leq t''_3 \\ & \text{" } \frac{v_0 l}{b(l-b)} \left[x \left(\frac{1}{2} - \frac{b}{l} \right) + \frac{1}{2} (ct + b) - l \right] && \text{при } t''_3 \leq t \leq t''_4 \\ & \text{" } \frac{v_0(l-x)}{l-b} && \text{" } t''_4 \leq t \leq \frac{2l}{c} \end{aligned} \right\} \quad (5.16)$$

Эти формулы дают всё необходимое для расчета формы струны в любой момент времени.

На рис. 50 построение этих форм дано для $b = \frac{l}{4}$ через одну шестнадцатую периода колебаний $T = \frac{2l}{c}$.

Как видно на рисунке, достаточно произвести построение для одного полупериода.

2°. Решение задачи предыдущего пункта потребовало тонких соображений и довольно длинного вычисления; поэтому преимущество операционного метода не было достаточно очевидно. При рассмотрении более частных вопросов это преимущество становится вполне наглядным. Приведём некоторые примеры.

Определить движение частицы массы m , закреплённой на натянутой струне длины $2l$ в ее середине; частица начинает движение из состояния покоя под действием импульса S .

Начало координат расположим в середине струны; вследствие симметрии можно рассматривать участок струны $0 \leq x \leq l$. Через $y(t) = v(0, t)$ назовём отклонение частицы от её равновесного положения;

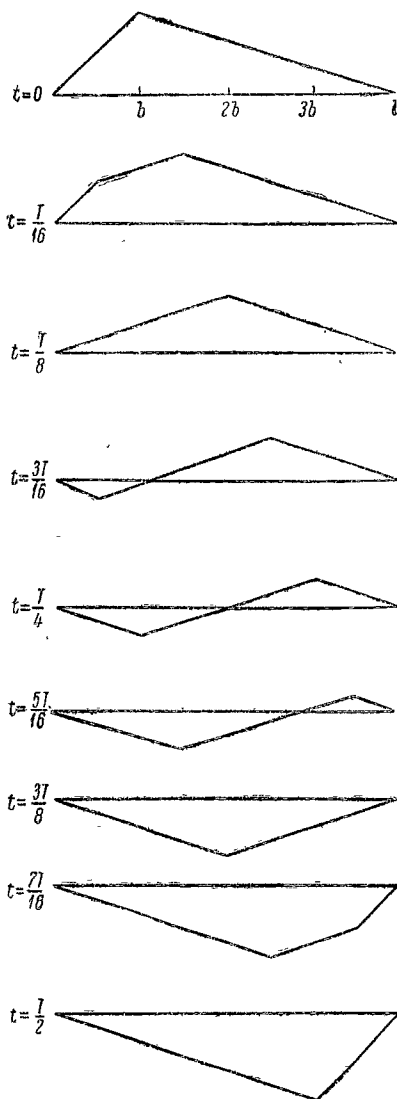


Рис. 50. Формы колебаний струны.

уравнение движения её будет:

$$m\ddot{y} = 2T[v'(x, t)]_{x=0} + S\sigma_1(t).$$

Соответствующее изображающее уравнение имеет вид:

$$mp^2 Y(p) = 2TV'(0, p) + pS. \quad (5.17)$$

Изображающее уравнение (6) в рассматриваемом случае будет

$$V''(x, p) - \frac{p^2}{c^2} V(x, p) = 0,$$

причём

$$V(0, p) = Y(p),$$

$$V(l, p) = 0.$$

Получаем:

$$V(x, p) = Y(p) \frac{\operatorname{sh} \frac{p(l-x)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{pl}{c}}, \quad (5.18)$$

и подстановка в (17) даёт:

$$Y(p) = \frac{pS}{mp^2 + \frac{2Tp}{c} \operatorname{cth} \frac{pl}{c}}.$$

Обозначая отношение массы струны к массе частицы через $\alpha = \frac{2\rho l}{m}$ и вспоминая, что $\frac{T}{\rho} = c$, получаем:

$$Y(p) = \frac{lS}{mc} \frac{1}{r + \alpha \operatorname{cth} r}, \quad (5.19)$$

где для краткости принято $r = \frac{pl}{c}$, что соответствует в начальной функции переходу к безразмерному времени $\tau = \frac{ct}{l}$.

Переход к начальной функции осуществим двумя способами.

а) *Определение движения частицы по последовательным этапам.* Представим полученное изображение в виде:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r + \alpha \operatorname{cth} r} &= \frac{1 - e^{-2r}}{r + \alpha} \frac{1}{1 - \frac{r - \alpha}{r + \alpha} e^{-2r}} = \\ &= \frac{1}{r + \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{r + \alpha} \left[\left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right)^n - \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right)^{n-1} \right] e^{-2nr}. \quad (5.20) \end{aligned}$$

В п. 5° § 3 мы имели соотношение $\left(\frac{p - \lambda}{p} \right)^n \rightarrow l_n(\lambda t)$, где $l_n(x)$ — полином Лагерра номер n . Чтобы использовать это соотношение в настоящем случае, полагаем

$$\left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right)^n = \left(\frac{r + \alpha - 2\alpha}{r + \alpha} \right)^n = F(r + \alpha)$$

и, следовательно,

$$F(r) = \left(\frac{r - 2\alpha}{r} \right)^n \rightarrow l_n(2\alpha\tau).$$

По VIII табл. 1 (по теореме смещения) получаем:

$$\frac{r}{r + \alpha} F(r + \alpha) = \frac{r(r - \alpha)^n}{(r + \alpha)^{n+1}} \rightarrow e^{-\alpha\tau} l_n(2\alpha\tau).$$

Теперь легко построить изображение скорости $v(t)$ частицы в нашей задаче. Имеем по (19):

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt} = \frac{dy}{dt} \frac{c}{l}, \quad v(t) \leftarrow \frac{c}{l} r Y(p),$$

так как $y(0) = 0$. Получаем:

$$\frac{m}{S} v(t) \leftarrow \frac{r}{r + \alpha} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{r}{r + \alpha} \left[\left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right)^n - \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right)^{n-1} \right] e^{-2nr}.$$

Пусть $0 < \tau < 2$. Получим

$$\frac{m}{S} v(t) = e^{-\alpha\tau}.$$

Пусть теперь $2s < \tau < 2(s + 1)$, где s — целое число (1, 2, 3, ...). В соответствии с теоремой запаздывания нужно

составить начальную функцию, учитывая лишь s первых слагаемых в сумме, стоящей в формуле (21). Получаем

$$\frac{m}{S} v(t) = e^{-\alpha \tau} + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\alpha (\tau - 2n)} \{I_n[2\alpha (\tau - 2n)] - I_{n-1}[2\alpha (\tau - 2n)]\}. \quad (5.21)$$

Например, при $2 < \tau < 4$ получаем:

$$\frac{m}{S} v(t) = e^{-\alpha \tau} - e^{-\alpha (\tau - 2)} 2\alpha (\tau - 2);$$

при $4 < \tau < 6$:

$$\begin{aligned} \frac{m}{S} v(t) = e^{-\alpha \tau} - e^{-\alpha (\tau - 2)} 2\alpha (\tau - 2) - \\ - e^{-\alpha (\tau - 4)} [2\alpha (\tau - 4) + 2\alpha^2 (\tau - 4)^2] \end{aligned}$$

и т. д.

Интегрированием можно получить $y(t)$:

при $0 < \tau < 2$:

$$y(t) = \frac{IS}{mc} \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha},$$

при $2 < \tau < 4$:

$$y(t) = \frac{IS}{mc} \left\{ \frac{1 - e^{-\alpha \tau}}{\alpha} - \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\alpha} e^{-\alpha (\tau - 2)} [1 + \alpha (\tau - 2)] \right\}$$

и т. д.

Конечно, эти результаты можно получить и без интегрирования, непосредственно находя начальную функцию по изображению (20) с помощью теоремы запаздывания для последовательных этапов $0 < \tau < 2$, $2 < \tau < 4$ и т. д.

б) *Представление решения о форме ряда.* Чтобы его получить, воспользуемся второй теоремой разложения. Перепишем (19) в виде

$$Y(p) = \frac{IS}{mc} \frac{\text{th } r}{r \text{th } r + \alpha}. \quad (5.22)$$

Трансцендентное уравнение

$$r \text{th } r + \alpha = 0$$

не имеет вещественных корней; полагая $r = i\beta$, получим уравнение, встречающееся во многих задачах теории колебаний:

$$\beta \text{tg } \beta = \alpha,$$

имеющее нулевой корень и бесчисленное множество вещественных корней $\pm \beta_k$, где $k = 1, 2, 3, \dots$. Эти корни легко находятся графически, а для низшего (первого) корня имеется таблица, дающая его по аргументу α .¹

По второй теореме разложения получаем:

$$\begin{aligned} Y(p) &= \frac{lS}{mc} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{th} i\beta_k}{\left(\operatorname{th} i\beta_k + \frac{i^2 \beta_k}{\operatorname{ch}^2 i\beta_k}\right) i\beta_k} \left(\frac{r}{r - i\beta_k} - \frac{r}{r + i\beta_k}\right) = \\ &= \frac{2lS}{mc} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \beta_k}{\left(\operatorname{tg} \beta_k + \frac{\beta_k}{\cos^2 \beta_k}\right) \beta_k} \frac{r\beta_k}{r^2 + \beta_k^2} \div \rightarrow \\ &\div \rightarrow \frac{2lS}{mc} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\operatorname{tg} \beta_k \sin \beta_k \tau}{\beta_k [\operatorname{tg} \beta_k + \beta_k (1 + \operatorname{tg}^2 \beta_k)]}. \end{aligned}$$

Воспользовавшись уравнением, определяющим корни β_k , можно это выражение представить также в виде:

$$y(t) = \frac{2lS\alpha}{mc} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k \tau}{\beta_k (\alpha + \alpha^2 + \beta_k^2)}. \quad (5.23)$$

Можно улучшить сходимость этого ряда, замечая, что

$$\frac{1}{\alpha + \alpha^2 + \beta_k^2} = \frac{1}{\beta_k^2} - \frac{\alpha + \alpha^2}{\alpha + \alpha^2 + \beta_k^2}.$$

Получаем

$$y(t) = \frac{2lS\alpha}{mc} \left[\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k \tau}{\beta_k^3} - (\alpha + \alpha^2) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k \tau}{\beta_k^3 (\alpha + \alpha^2 + \beta_k^2)} \right]. \quad (5.24)$$

3°. Рассмотрим задачу о колебаниях струны под действием перемещающейся вдоль неё с постоянной скоростью α силы Q . Уравнение движения струны можно написать в виде:

$$\rho \ddot{v}(x, t) - T v''(x, t) = Q \sigma_1 (at - x). \quad (5.25)$$

¹ См., например, С. П. Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле. ГИТИ, 1931, стр. 209.

Правая часть обращается в нуль при $x \neq at$; в точке $x = at$ она представляет сосредоточенную силу. Вспоминая, что

$$\sigma_1(at - x) \rightarrow e^{-\frac{px}{a}} \frac{p}{a},$$

получим изображающее уравнение в виде:

$$\frac{p^2}{c^2} V(x, p) - V''(x, p) = \frac{Q}{\rho c^2} \frac{p}{a} e^{-\frac{px}{a}}.$$

Решение этого уравнения, обращающегося в нуль при $x = 0$ и $x = l$, имеет вид:

$$V(x, p) = \frac{Qa}{\rho(c^2 - a^2)} \left[\frac{\operatorname{sh} \frac{p(l-x)}{c}}{p \operatorname{sh} \frac{pl}{c}} + \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{c}}{p \operatorname{sh} \frac{pl}{c}} e^{-\frac{pl}{a}} - \frac{1}{p} e^{-\frac{px}{a}} \right]. \quad (5.26)$$

По второй теореме разложения получаем:

$$\frac{\operatorname{sh} \frac{p(l-x)}{c}}{p \operatorname{sh} \frac{pl}{c}} \rightarrow \frac{(l-x)t}{l} + \frac{2l}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{\pi n(l-x)}{l} \sin \frac{\pi nct}{l}.$$

Точно так же находим:

$$\begin{aligned} \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{c}}{p \operatorname{sh} \frac{pl}{c}} e^{-\frac{pl}{a}} &\rightarrow 0 && \text{при } t < \frac{l}{a}, \\ \text{"} &\rightarrow \frac{x}{l} \left(t - \frac{l}{a} \right) + \\ &+ \frac{2l}{\pi^2 c} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n^2} \sin \frac{\pi nx}{l} \sin \frac{\pi nc \left(t - \frac{l}{a} \right)}{l} \\ &&& \text{при } t > \frac{l}{a}, \end{aligned}$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} e^{-\frac{px}{a}} &\rightarrow 0 && \text{при } t < \frac{x}{a}, \\ \text{„} &\rightarrow t - \frac{x}{a} && \text{„ } t > \frac{x}{a}. \end{aligned}$$

Складывая эти соотношения, получим решение задачи в рядах. Сходимость их будет весьма медленной. Поэтому следует предпочесть решение по отдельным этапам, получающееся путем разложения изображения в ряд по степеням показательных функций с последующим применением теоремы запаздывания.

Имеем:

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &\leftarrow \frac{\operatorname{sh} \frac{p(l-x)}{c}}{p \operatorname{sh} \frac{pl}{c}} = \\ &= \left(e^{-\frac{px}{c}} - e^{-\frac{p(l-x)}{c}} \right) \left(1 + e^{-\frac{2pl}{c}} + e^{-\frac{4pl}{c}} + \dots \right) \frac{1}{p} \end{aligned}$$

и по теореме запаздывания:

$$\begin{aligned} f_1(x, t) &= 0 && \text{при } ct < x \\ \text{„} \quad \text{„} \quad t - \frac{x}{c} &&& \text{„ } x < ct < 2l - x \\ \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{2(l-x)}{c} &&& \text{„ } 2l - x < ct < 2l + x \\ \text{„} \quad \text{„} \quad t - \frac{3x}{c} &&& \text{„ } 2l + x < ct < 4l - x \\ \text{„} \quad \text{„} \quad \frac{4(l-x)}{c} &&& \text{„ } 4l - x < ct < 4l + x \\ \text{„} \quad \text{„} \quad t - \frac{5x}{c} &&& \text{„ } 4l + x < ct < 6l - x \end{aligned}$$

и т. д.

Подобным же образом находим:

$$\begin{aligned} f_2(x, t) &\leftarrow \frac{\operatorname{sh} \frac{px}{c}}{p \operatorname{sh} \frac{pl}{c}} e^{-\frac{pl}{a}} = \\ &= \left[e^{-p \left(\frac{l}{a} + \frac{l-x}{c} \right)} - e^{-p \left(\frac{l}{a} + \frac{l+x}{c} \right)} \right] \times \\ &\quad \times \left(1 + e^{-\frac{2pl}{c}} + e^{-\frac{4pl}{c}} + \dots \right) \frac{1}{p} \end{aligned}$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned}
 f_2(x, t) &= 0 && \text{при } ct < \frac{lc}{a} + l - x, \\
 \text{„ „ } t - \frac{l}{a} - \frac{l-x}{c} &&& \text{„ } \frac{lc}{a} + l - x < ct < \frac{lc}{a} + l + x, \\
 \text{„ „ } \frac{2x}{c} &&& \text{„ } \frac{lc}{a} + l + x < ct < \frac{lc}{a} + 3l - x, \\
 \text{„ } t - \frac{l}{a} - \frac{3(l-x)}{c} &&& \text{„ } \frac{lc}{a} + 3l - x < ct < \frac{lc}{a} + 3l + x
 \end{aligned}$$

и т. д.

Наконец,

$$\begin{aligned}
 -\frac{1}{p} e^{-\frac{px}{a}} \rightarrow f_3(x, t) &= 0 && \text{при } ct < \frac{cx}{a}, \\
 \text{„ „ } -t + \frac{x}{a} &&& \text{„ } \frac{cx}{a} < ct.
 \end{aligned}$$

Смещение даётся формулой

$$v(x, t) = \frac{Pa}{\rho(c^2 - a^2)} [f_1(x, t) + f_2(x, t) + f_3(x, t)], \quad (5.27)$$

по которой форма провисания струны легко может быть построена для любого момента времени.

4°. Задача о продольных колебаниях стержня сводится формально к тому же самому уравнению, что и задача о струне:

$$E\omega u''(x, t) = \rho \ddot{u}(x, t) - q(x, t). \quad (5.28)$$

Через $u(x, t)$ обозначено продольное смещение сечения x ; ω и ρ — площадь поперечного сечения и погонная масса, которые считаем постоянными; $q(x, t)$ — погонная нагрузка. Продольное усилие (положительное при растяжении) в стержне определяется формулой:

$$N(x, t) = E\omega u'(x, t). \quad (5.29)$$

Если конец стержня свободен, то на нём $N = 0$, т. е. $u' = 0$; если конец заделан, то $u = 0$.

Рассмотрим задачу о продольных колебаниях стержня с грузом на конце; верхний конец стержня заделан, к нижнему прикреплен груз Q , стержень растянут

силой S . Рассмотрим колебания, которые возникнут при внезапном удалении этой силы.

Имеем дифференциальное уравнение колебаний

$$c^2 u''(x, t) = \ddot{u}(x, t) \quad \left(c^2 = \frac{E\omega}{\rho} \right) \quad (5.30)$$

при граничных условиях

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{Q}{g} \ddot{u}(l, t) = -N(l, t) = -E\omega u'(x, l). \quad (5.31)$$

Начало координат взято в заделанном сечении. Второе условие представляет уравнение движения груза под действием реакции стержня, которая равна и направлена противоположно усилию в стержне. Этому уравнению можно придать вид

$$\ddot{u}(l, t) = -\frac{\alpha c^2}{l} u'(l, t); \quad \alpha = \frac{\rho l g}{Q}, \quad (5.32)$$

если обозначить через α отношение весов стержня и груза.

Искомое решение должно удовлетворить также начальным условиям:

$$u(x, 0) = \frac{Sx}{E\omega}, \quad \dot{u}(x, 0) = 0. \quad (5.33)$$

Изображающее уравнение будет

$$U''(x, p) - \frac{p^2}{c^2} U(x, p) = -\frac{p^2}{c^2} \frac{Sx}{E\omega}, \quad (5.34)$$

причём по (31), (32):

$$U(0, p) = 0, \quad p^2 \left[U(l, p) - \frac{Sl}{E\omega} \right] = -\frac{\alpha c^2}{l} U'(l, p). \quad (5.35)$$

Решение дифференциального уравнения (34) при этих краевых условиях будет

$$U(x, p) = \frac{Sl}{E\omega} \left[\xi - \frac{\alpha \operatorname{sh} r\xi}{r(r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r)} \right], \quad (5.36)$$

где введено безразмерное переменное $\xi = \frac{x}{l}$ и обозначено $r = \frac{pl}{c}$, что соответствует переходу в начальных функциях к безразмерному времени $\tau = \frac{ct}{l}$.

Если ограничиться разысканием движения груза, то дело сведётся к построению начальной функции для изображения

$$\frac{\operatorname{sh} r}{r(r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r)} = \frac{\operatorname{th} r}{r(r \operatorname{th} r + \alpha)},$$

которое отличается лишь множителем $\frac{1}{r}$ от (22).

Поэтому по (23) получим:

$$u(l, t) = \frac{Sl}{E\omega} \left[1 - 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1 - \cos \beta_k \tau}{\beta_k^2 (\alpha + \alpha^2 + \beta_k^2)} \right], \quad (5.37)$$

где β_k — корни уравнения $\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha$. Перемещение любого сечения даётся выражением

$$u(x, t) = \frac{Sl}{E\omega} \left[\xi - 2\alpha^2 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin \beta_k \xi (1 - \cos \beta_k \tau)}{\beta_k^2 \sin \beta_k (\alpha + \alpha^2 + \beta_k^2)} \right], \quad (5.38)$$

получение которого не составит труда.

Построение решения по отдельным этапам на основании теоремы запаздывания делается с помощью уже описанных выше приёмов. Найдём, например, натяжение в конце стержня $N(l, t)$. Имеем по (31):

$$N(l, t) \leftarrow E\omega U'(l, p) = S \left(1 - \frac{\alpha \operatorname{ch} r}{r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r} \right) = \frac{Sr}{r + \alpha \operatorname{cth} r},$$

что отличается лишь множителем r от (20). Решение будет иметь вид (22).

5°. Чтобы дать пример составления периодического решения, рассмотрим задачу предыдущего пункта, предполагая, что к первоначально покоившемуся грузу периодически прикладываются импульсы величины I ; период импульсов обозначим T . Имеем дифференциальное уравнение продольных колебаний стержня

$$c^2 u''(x, t) = \ddot{u}(x, t)$$

с начальными условиями

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0$$

и краевыми условиями

$$u(0, t) = 0, \quad \frac{Q}{g} \ddot{u}(l, t) = -E\omega u'(l, t) + I [\sigma_1(t) + \sigma_1(t-T) + \sigma_1(t-2T) + \dots].$$

Изображающее уравнение будет

$$U''(x, p) = \frac{p^2}{c^2} U(x, p),$$

а краевые условия к нему:

$$U(0, p) = 0, \quad p^2 U(l, p) = -\frac{\alpha c^2}{l} U'(l, p) + \frac{I g}{Q} \frac{p}{1 - e^{-pT}}.$$

Получаем

$$U(x, p) = A \operatorname{sh} \frac{px}{c},$$

причём для определения A служит уравнение:

$$A \left(p^2 \operatorname{sh} \frac{pl}{c} + \frac{\alpha c}{l} p \operatorname{ch} \frac{pl}{c} \right) = \frac{I g}{Q} \frac{p}{1 - e^{-pT}}.$$

Находим:

$$U(l, p) = \frac{I g l}{Q c} \frac{\operatorname{sh} r}{(1 - e^{-r\tau_0})(r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r)} \quad \left(\tau_0 = \frac{cT}{l} \right). \quad (5.39)$$

Знаменатель имеет две группы корней: во-первых, корни $r_k = i\beta_k$, где $k = \pm 1, \pm 2, \dots$ и β_k — уже указанные выше корни уравнения $\beta \operatorname{tg} \beta = \alpha$, и корни уравнения $1 - e^{-r\tau_0} = 0$, равные $\frac{2k\pi i}{\tau_0}$ при $k = \pm 1, \pm 2, \dots$

Разложение, соответствующее первой группе корней, даёт свободные колебания груза $u_1(l, t)$; получаем

$$u_1(l, t) \leftarrow \frac{I g l}{Q c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha + \beta_k \operatorname{ctg} \beta_k) \beta_k} \frac{r(\beta_k - r \operatorname{ctg} \frac{\beta_k \tau_0}{2})}{r^2 + \beta_k^2}. \quad (5.40)$$

Чтобы найти чисто вынужденные колебания груза, т. е. колебания, имеющие период τ_0 импульсов, заметим, что достаточно знать соответствующую им начальную функцию только для $\tau < \tau_0$. Но для $\tau < \tau_0$ изображение

$$\begin{aligned} U^*(l, p) &= \frac{I g l}{Q c} \frac{\operatorname{sh} r}{\operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r} = \\ &= \frac{2 I g l}{Q c} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha + \beta_k \operatorname{ctg} \beta_k) \beta_k} \frac{r \beta_k}{r^2 + \beta_k^2} \end{aligned} \quad (5.41)$$

соответствует начальной функции, представляющей наложение свободных и вынужденных колебаний.

Поэтому, вычитая (40) из (41), получим изображение чисто вынужденных колебаний $U_2(l, p)$:

$$U_2(l, p) = \frac{Igl}{Qc} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(1 + \alpha + \beta_k \operatorname{ctg} \beta_k) \beta_k} \frac{r \left(\beta_k + r \operatorname{ctg} \frac{\beta_k \tau_0}{2} \right)}{r^2 + \beta_k^2}$$

и, следовательно, для $\tau < \tau_0$:

$$u_2(l, t) = \frac{Igl}{Qc} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos \beta_k \left(\tau - \frac{\tau_0}{2} \right)}{(1 + \alpha + \beta_k \operatorname{ctg} \beta_k) \sin \frac{\beta_k \tau_0}{2}}. \quad (5.42)$$

§ 26. Продольный удар цилиндров

1°. Цилиндр длины l_1 , двигаясь поступательно со скоростью v_1 , настигает второй цилиндр длины l_2 , имеющий скорость $v_2 < v_1$. Требуется определить распределение скоростей и продольных усилий по длине того и другого цилиндров в течение акта соударения их.

Момент начала соударения примем за начало отсчета времени; ось x направим по оси цилиндров, причём начало её поместим в свободном основании первого цилиндра: основанию, по которому происходит соприкосновение цилиндров при ударе, соответствует $x = l_1$; наконец, $x = l_1 + l_2$ на свободном основании второго цилиндра.

Продольное смещение сечения первого цилиндра обозначим $u_1(x, t)$, второго — через $u_2(x, t)$. Дифференциальные уравнения продольных колебаний, служащие для определения этих функций, будут:

$$\left. \begin{aligned} \ddot{u}_1(x, t) &= c_1^2 u_1''(x, t), \\ \ddot{u}_2(x, t) &= c_2^2 u_2''(x, t), \end{aligned} \right\} \quad (5.43)$$

где $c_i = \sqrt{\frac{E_i \omega_i}{\rho_i}}$ ($i = 1, 2$) — скорости распространения продольных возмущений (скорости звука) в первом и втором цилиндрах.

К этим уравнениям присоединяются начальные условия:

$$\begin{aligned} \dot{v}_1(x, 0) &= v_1, & \dot{v}_2(x, 0) &= v_2 \\ u_1(x, 0) &= 0, & u_2(x, 0) &= 0 \end{aligned} \quad (5.44)$$

и краевые условия

$$\left. \begin{aligned} u_1'(0, t) &= 0, & u_2'(l_1 + l_2, t) &= 0; \\ u_1(l_1, t) &= u_2(l_1, t), & E_1 \omega_1 u_1'(l_1, t) &= E_2 \omega_2 u_2'(l_1, t). \end{aligned} \right\} \quad (5.45)$$

Первая группа условий выражает отсутствие напряжений на свободных основаниях цилиндров, вторая — непрерывность продольных усилий и перемещений в основании, по которому цилиндры соприкасаются.

Изображающая система уравнений будет:

$$\left. \begin{aligned} \frac{p^2}{c_1^2} U_1(x, p) &= U_1''(x, p) + \frac{pv_1}{c_1^2}, \\ \frac{p^2}{c_2^2} U_2(x, p) &= U_2''(x, p) + \frac{pv_2}{c_2^2}; \end{aligned} \right\} \quad (5.46)$$

$$\left. \begin{aligned} U_1'(0, p) &= 0, & U_2'(l_1 + l_2, p) &= 0, \\ U_1(l_1, p) &= U_2(l_1, p), & E_1 \omega_1 U_1'(l_1, p) &= E_2 \omega_2 U_2'(l_1, p). \end{aligned} \right\} \quad (5.47)$$

Получаем:

$$\left. \begin{aligned} U_1(x, p) &= \frac{v_1}{p} + A_1 \operatorname{ch} \frac{px_1}{c_1}, \\ U_2(x, p) &= \frac{v_2}{p} + A_2 \operatorname{ch} \frac{p(l_1 + l_2 - x)}{c_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.48)$$

Для определения констант A_1 и A_2 получаем систему уравнений:

$$\left. \begin{aligned} \frac{v_1}{p} + A_1 \operatorname{ch} \frac{pl_1}{c_1} &= \frac{v_2}{p} + A_2 \operatorname{ch} \frac{pl_2}{c_2}, \\ \frac{E_1 \omega_1}{c_1} A_1 \operatorname{sh} \frac{pl_1}{c_1} &= - \frac{E_2 \omega_2}{c_2} A_2 \operatorname{sh} \frac{pl_2}{c_2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.49)$$

В дальнейшем будем считать, что поперечные сечения и материалы цилиндров одинаковы: $c_1 = c_2 = c$, $E_1 = E_2$,

$\omega_1 = \omega_2$. Получаем после определения констант и подстановки:

$$U_1(x, p) = \frac{v_1}{p} - \frac{v_1 - v_2}{p} \frac{\operatorname{sh} \frac{pl_2}{c} \operatorname{ch} \frac{px}{c}}{\operatorname{sh} \frac{p(l_1 + l_2)}{c}},$$

$$U_2(x, p) = \frac{v_2}{p} + \frac{v_1 - v_2}{p} \frac{\operatorname{sh} \frac{pl_1}{c} \operatorname{ch} \frac{p(l_1 + l_2 - x)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{p(l_1 + l_2)}{c}}. \quad (5.50)$$

Изображения скоростей, вследствие второй группы условий (44), будут:

$$\dot{v}_1(x, t) \leftarrow \div p U_1(x, p) = v_1 - (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} \frac{pl_2}{c} \operatorname{ch} \frac{px}{c}}{\operatorname{sh} \frac{p(l_1 + l_2)}{c}},$$

$$\dot{v}_2(x, t) \leftarrow \div p U_2(x, p) =$$

$$= v_2 + (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} \frac{pl_1}{c} \operatorname{ch} \frac{p(l_1 + l_2 - x)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{p(l_1 + l_2)}{c}}. \quad (5.51)$$

Изображения продольных усилий даются формулами:

$$N_1(x, t) \leftarrow \div - \frac{E\omega}{c} (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} \frac{pl_2}{c} \operatorname{sh} \frac{px}{c}}{\operatorname{sh} \frac{p(l_1 + l_2)}{c}},$$

$$N_2(x, t) \leftarrow \div - \frac{E\omega}{c} (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} \frac{pl_1}{c} \operatorname{sh} \frac{p(l_1 + l_2 - x)}{c}}{\operatorname{sh} \frac{p(l_1 + l_2)}{c}}. \quad (5.52)$$

2°. Рассмотрим частные случаи. Пусть $l_1 = l_2 = l$; для упрощения будем писать $\frac{pl}{c} = r$, т. е. перейдём к безразмерному времени $\tau = \frac{ct}{l}$; примем также $\xi = \frac{x}{l}$.

Получаем:

$$\dot{v}_1(x, t) \leftarrow \div v_1 - (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} r \operatorname{ch} r\xi}{\operatorname{sh} 2r} =$$

$$= v_1 - \frac{1}{2} (v_1 - v_2) \frac{[e^{-r(1-\xi)} + e^{-r(1+\xi)}](1 - e^{-2r})}{1 - e^{-4r}}.$$

Числитель $F_1(r, \xi) = (1 - e^{-2r}) [e^{-r(1-\xi)} + e^{-r(1+\xi)}]$ является изображением функции, обращающейся в нуль при $\tau > 4$. Действительно, при $\tau > 3 + \xi$:

$$F_1(r, \xi) = e^{-r(1-\xi)} + e^{-r(1+\xi)} - e^{-r(3-\xi)} - e^{-r(3+\xi)} \rightarrow 1 + 1 - 1 - 1 = 0.$$

Поэтому $\dot{u}_1(x, t)$ является периодической функцией периода $\tau = 4$, т. е. $t = T = \frac{4l}{c}$, и достаточно знать ее значения при $\tau < 4$.

Получаем:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(x, t) &= v_1 && \text{при } 0 < \tau < 1 - \xi \\ & \text{„ } \frac{1}{2}(v_1 + v_2) && \text{„ } 1 - \xi < \tau < 1 + \xi \\ & \text{„ } v_2 && \text{„ } 1 + \xi < \tau < 3 - \xi \\ & \text{„ } \frac{1}{2}(v_1 + v_2) && \text{„ } 3 - \xi < \tau < 3 + \xi \end{aligned}$$

Для второго цилиндра, обозначая $2 - \xi = \xi_1$, точно так же получаем:

$$\begin{aligned} \dot{u}_2(x, t) &= v_2 && \text{при } 0 < \tau < \xi_1 \\ & \text{„ } \frac{1}{2}(v_1 + v_2) && \text{„ } 1 - \xi_1 < \tau < 1 + \xi_1 \\ & \text{„ } v_1 && \text{„ } 1 + \xi_1 < \tau < 3 - \xi_1 \\ & \text{„ } \frac{1}{2}(v_1 + v_2) && \text{„ } 3 - \xi_1 < \tau < 3 + \xi_1 \end{aligned}$$

Изображение продольного усилия по (52) будет:

$$N_1(x, t) \leftarrow \frac{E\omega(v_1 - v_2)}{2c} [e^{-r(1-\xi)} - e^{-r(1+\xi)}] \frac{1 + e^{-2r}}{1 - e^{-4r}}.$$

Аналогичное выражение получается для изображения $N_2(x, t)$.

Получаем:

$$\begin{aligned} N_1(x, t) &= 0 && \text{при } 0 < \tau < 1 - \xi \\ & \text{„ } -\frac{1}{2c} E\omega(v_1 - v_2) && \text{„ } 1 - \xi < \tau < 1 + \xi \\ & \text{„ } 0 && \text{„ } 1 + \xi < \tau < 3 - \xi \\ & \text{„ } -\frac{1}{2c} E\omega(v_1 - v_2) && \text{„ } 3 - \xi < \tau < 3 + \xi \end{aligned}$$

Таким образом, при $t > \frac{2l}{c}$, т. е. $\tau > 2$, $N_1(x, t)$ оказывается положительным, т. е. цилиндры не давят друг на друга, и процесс удара нужно считать закончившимся. В этот

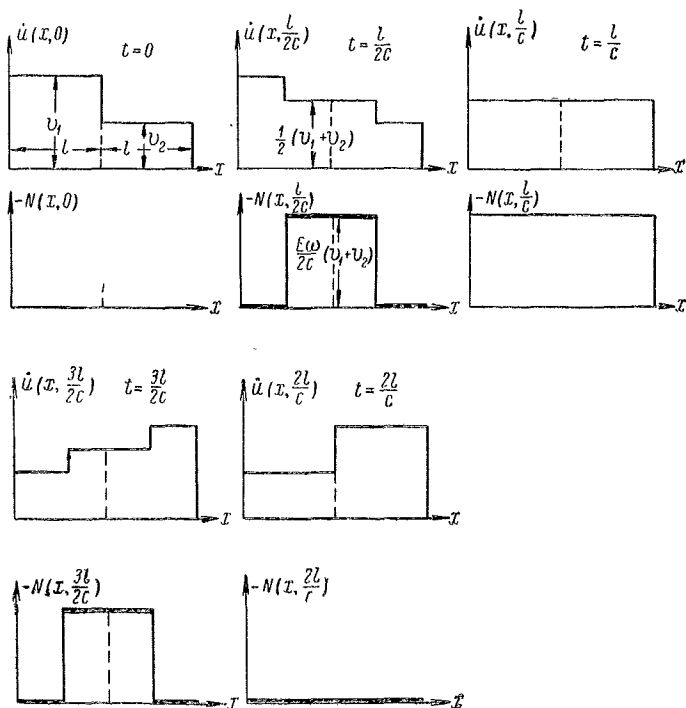


Рис. 51. Распределение скоростей и продольных усилий при ударе двух одинаковых цилиндров.

момент цилиндры, как видно из приведённых формул, обменялись скоростями. График распределения скоростей и продольных усилий для ряда моментов времени представлен на рис. 51.

3°. Рассмотрим в качестве второго примера случай $l = \frac{4l}{3}$, $l_2 = \frac{2l}{3}$, так что $l_1 + l_2 = 2l$. При обозначениях

$r = \frac{2pl}{3c}$, $x = \frac{4}{3}l\xi$ — для первого цилиндра и $x = 2l - \frac{2}{3}l\xi_1$ — для второго, где $0 < \xi < 1$, $0 < \xi_1 < 1$, получим:

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(x, t) &\leftarrow \div v_1 - (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} r \operatorname{ch} 2r\xi}{\operatorname{sh} 3r}, \\ \dot{u}_2(x, t) &\leftarrow \div v_2 + (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} 2r \operatorname{ch} r\xi_1}{\operatorname{sh} 3r}, \\ N_1(x, t) &\leftarrow \div - \frac{E\omega}{c} (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} r \operatorname{sh} 2r\xi}{\operatorname{sh} 3r}, \\ N_2(x, t) &\leftarrow \div - \frac{E\omega}{c} (v_1 - v_2) \frac{\operatorname{sh} 2r \operatorname{sh} r\xi_1}{\operatorname{sh} 3r}. \end{aligned}$$

Находим

$$\begin{aligned} \dot{u}_1(x, t) &= v_1 && \text{при } 0 < \frac{3ct}{4l} < 1 - \frac{3}{4} \frac{x}{l}, \\ &{}_2 \frac{1}{2} (v_1 + v_2) && \text{„ } 1 - \frac{3}{4} \frac{x}{l} < \frac{3ct}{4l} < 1 + \frac{3}{4} \frac{x}{l} \end{aligned}$$

и т. д.

$$\begin{aligned} \dot{u}_2(x, t) &= v_2 && \text{при } 0 < \frac{3ct}{4l} < -1 + \frac{3}{4} \frac{x}{l}, \\ &{}_2 \frac{1}{2} (v_1 + v_2) && \text{„ } -1 + \frac{3}{4} \frac{x}{l} < \frac{3ct}{4l} < 2 - \frac{3x}{4l}, \\ &{}_1 v_1 && \text{„ } 2 - \frac{3x}{4l} < \frac{3ct}{4l} < 1 + \frac{3x}{4l} \end{aligned}$$

и т. д.

Удар заканчивается в момент $t = \frac{4l}{3c}$, когда скорость ударяющего цилиндра в сечении, по которому цилиндры соприкасаются, меньше скорости ударяемого цилиндра; в этот момент первый цилиндр сжат, а продольное усилие во втором цилиндре равно нулю.

Скорости цилиндров после удара оказываются равными:

$$v'_1 = \frac{1}{2} (v_1 + v_2), \quad v'_2 = v_1.$$

Пользуясь элементарной теорией абсолютно упругого удара, т. е. выражая равенство количеств движения и кинетических энергий системы до и после удара, получили бы:

$$v''_1 = \frac{1}{2} (v_1 + 2v_2), \quad v''_2 = \frac{1}{3} (4v_1 - v_2).$$

Разница результатов объясняется тем, что элементарная теория не учитывает запаса энергии в момент окончания удара, имеющегося в первом цилиндре. Этот запас равен:

$$\frac{4l}{3} \frac{N_1^2}{2E\omega} = \frac{1}{6} \rho l (v_1 + v_2)^2.$$

Уравнение энергии теперь принимает вид:

$$\frac{1}{6} \rho l (v_1 - v_2)^2 + \frac{2}{3} \rho l v_1'^2 + \frac{1}{3} \rho l v_2'^2 = \frac{2}{3} \rho l v_1^2 + \frac{1}{3} \rho l v_2^2$$

и нетрудно проверить, что оно удовлетворяется при подстановке значений v_1' и v_2' .

Площади, ограниченные графиком скорости и осью абсцисс, остаются неизменными в любой момент времени—это, конечно, является следствием теоремы сохранения количества движения системы при ударе.

Конечно, все приведённые выше результаты можно было бы получить, руководствуясь тем, что возмущение при ударе начинает распространяться со скоростью c по обоим цилиндрам от основания, по которому они соприкасаются, затем волна возмущения отражается от свободного конца цилиндра и т. д. Операционное исчисление позволяет обойти эти рассуждения и заменить их весьма простым, прямым вычислением, по ходу которого легко проследить за всеми обстоятельствами процесса удара.

§ 27. Продольный удар груза по балке

1°. Эта классическая задача, рассмотренная Сен-Венаном¹ и Буссинеском с помощью тонких рассуждений теории распространения волн, представляет весьма наглядный пример тех упрощений, которые достигаются при применении операционного метода.

¹Сен-Венан изложил решение этой задачи в примечании к § 60 французского перевода „Теории упругости“ Клебша (Clebsch, *Théorie de l'élasticité des corps solides*, trad. par Saint-Venant. 1883, стр. 480). См. также Е. Л. Николан, К теории продольного удара упругих стержней. Труды Ленингр. индустр. ин-та, № 3, 1934, стр. 85—92.

Нижний конец ($x=0$) балки заделан, падающий со скоростью v груз ударяет по верхнему свободному концу ($x=l$).

Задача ставится так: требуется найти решение дифференциального уравнения продольных колебаний стержня

$$c^2 u''(x, t) = \ddot{u}(x, t)$$

при краевых условиях

$$u(0, t) = 0, \quad M\ddot{u}(l, t) = -E\omega u'(l, t)$$

и при начальных условиях

$$u(x, 0) = 0, \quad \dot{u}(x, 0) = 0,$$

причём последнее условие соблюдается при $0 \leq x < l$, тогда как

$$\dot{u}(l, 0) = -v.$$

Удар будет происходить до момента, когда продольное усилие $N(l, t)$ на верхнем конце балки обратится в нуль и из отрицательного станет положительным.

Изображающая система уравнений будет:

$$\left. \begin{aligned} c^2 U''(x, p) &= p^2 U(x, p), \\ Mp^2 \left[U(l, p) - \frac{v}{p} \right] &= -E\omega U'(l, p), \quad U(0, p) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (5.53)$$

Получаем:

$$U(x, p) = A \operatorname{sh} \frac{px}{c},$$

и постоянная A определится из уравнения:

$$Mp^2 \left(A \operatorname{sh} \frac{pl}{c} + \frac{v}{p} \right) = -E\omega \frac{p}{c} A \operatorname{ch} \frac{pl}{c}.$$

Называя, как выше, $\alpha = \frac{pl}{M}$, получим:

$$U(x, p) = -\frac{vl}{c} \frac{\operatorname{sh} r\xi}{r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r}, \quad (5.54)$$

где $\xi = \frac{x}{l}$, $r = \frac{pl}{c}$, что обозначает переход к безразмерному времени $\tau = \frac{ct}{l}$. Далее имеем:

$$N(x, t) \leftarrow E\omega U'(x, p) = -\rho cv \frac{r \operatorname{ch} r\xi}{r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r}. \quad (5.55)$$

2°. В соответствии со сказанным, нужно начать исследование с рассмотрения усилия в месте удара

$$\begin{aligned} -N(l, t) &\leftarrow \rho c v \frac{r \operatorname{ch} r}{r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r} = \rho c v \left[1 + \frac{2r}{r + \alpha} e^{-2r} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{2r(r - \alpha)}{(r + \alpha)^2} e^{-4r} + \frac{2r(r - \alpha)^2}{(r + \alpha)^3} e^{-6r} + \dots \right] \frac{r}{r + \alpha} = \\ &= \rho c v \left[\frac{r}{r + \alpha} + 2r^2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(r - \alpha)^{n-1}}{(r + \alpha)^{n+1}} e^{-2nr} \right]. \end{aligned}$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{(r - \alpha)^{n-1} r^2}{(r + \alpha)^{n+1}} &= \frac{r(r - \alpha)^{n-1}(r - \alpha + \alpha)}{(r + \alpha)^{n+1}} = \\ &= r \frac{(r - \alpha)^n}{(r + \alpha)^{n+1}} + \frac{\alpha}{r + \alpha} \frac{r(r - \alpha)^{n-1}}{(r + \alpha)^n}. \end{aligned}$$

Выше, в § 25, мы получили соотношение:

$$\frac{r(r - \alpha)^n}{(r + \alpha)^{n+1}} \rightarrow e^{-\alpha \tau} l_n(2\alpha \tau). \quad (5.56)$$

Далее по теореме свёртывания:

$$\begin{aligned} \frac{1}{r + \alpha} \frac{r(r - \alpha)^{n-1}}{(r + \alpha)^n} &\rightarrow \int_0^{\tau} e^{-\alpha(\tau - \xi)} e^{-\alpha \xi} l_{n-1}(2\alpha \xi) d\xi = \\ &= \frac{1}{2\alpha} e^{-\alpha \tau} \int_0^{2\alpha \tau} l_{n-1}(x) dx. \end{aligned}$$

Получаем:

$$\frac{(r - \alpha)^{n-1} r^2}{(r + \alpha)^{n+1}} \rightarrow e^{-\alpha \tau} P_n(2\alpha \tau), \quad (5.57)$$

где введены в рассмотрение полиномы:

$$P_n(x) = l_n(x) + \frac{1}{2} \int_0^x l_{n-1}(x) dx. \quad (5.58)$$

Вспоминая, что

$$\begin{aligned} l_0(x) &= 1, \quad l_1(x) = 1 - x, \quad l_2(x) = \frac{x^2}{2} - 2x + 1, \\ l_3(x) &= 1 - 3x + \frac{3}{2}x^2 - \frac{1}{6}x^3 \text{ и т. д.,} \end{aligned}$$

получаем

$$P_1(x) = 1 - \frac{1}{2}x, \quad P_2(x) = \frac{1}{4}x^2 - \frac{3}{2}x + 1,$$

$$P_3(x) = 1 - \frac{5}{2}x + x^2 - \frac{1}{12}x^3$$

и т. д.

Возвращаясь к вычислению усилия $N(l, t)$, получим при $0 < \tau < 2$:

$$-\frac{N(l, t)}{\rho c v} = e^{-\alpha \tau}. \quad (5.59)$$

Допустим теперь, что

$$2s < \tau < 2(s+1),$$

где s — целое число; $s = 1, 2, \dots$

По теореме запаздывания и по (57) получим:

$$-\frac{N(l, t)}{\rho c v} = e^{-\alpha \tau} + 2 \sum_{n=1}^s e^{-\alpha(\tau-2n)} P_n[2\alpha(\tau-2n)]. \quad (5.60)$$

Пусть, например, $s = 1$, т. е. $2 < \tau < 4$. Получаем:

$$-\frac{N(l, t)}{\rho c v} = e^{-\alpha \tau} + 2e^{-\alpha(\tau-2)} [1 - \alpha(\tau-2)].$$

При $4 < \tau < 6$ имеем:

$$-\frac{N(l, t)}{\rho c v} = e^{-\alpha \tau} + 2e^{-\alpha(\tau-2)} [1 - \alpha(\tau-2)] +$$

$$+ 2e^{-\alpha(\tau-4)} [1 - 3(\tau-4) + \alpha^2(\tau-4)^2]$$

и т. д.

Из (60) следует, что усилие $N(l, t)$ претерпевает разрыв непрерывности в моменты $\tau = 2, 4, 6, \dots$. В эти моменты времени усилие уменьшается на величину

$$2\rho c v P_n(0) = 2\rho c v l_n(0) = 2\rho c v,$$

так как $l_n(0) = 1$, в чём легко убедиться, например, по изображению (56), воспользовавшись первой теоремой разложения.

При $0 < \tau < 2$ усилие $N(l, t)$ сохраняет знак, и процесс удара не может закончиться в течение этого периода.

При $2 < \tau < 4$ усилие обратится в нуль, если уравнение

$$f_1(\tau) = 1 + 2e^{2\alpha} [1 - \alpha(\tau - 2)] = 0$$

будем иметь корень в этом промежутке. Имеем

$$f_1(2) = 1 + 2e^{2\alpha} > 0, \quad f_1(4) = 1 + 2e^{2\alpha} - 4\alpha e^{2\alpha}$$

и наличие корня обуславливается выполнением неравенства

$$f_1(4) < 0, \quad \text{т. е.} \quad e^{-2\alpha} + 2 < 4\alpha.$$

Последнее же имеет место при $0,5787 < \alpha < \infty$.

Итак, если отношение массы стержня к массе ударяемого груза больше чем 0,5787, то удар прекращается в момент времени t_0 в промежутке $\frac{2l}{c} < t < \frac{4l}{c}$, причём t_0 определяется приведённым выше уравнением.

Допустим теперь, что $\alpha < 0,5787$; удар прекратится в один из моментов времени промежутка $4 < \tau < 6$, если уравнение

$$f_2(\tau) = 1 + 2e^{2\alpha} [1 - \alpha(\tau - 2)] + \\ + 2e^{4\alpha} [1 - 3\alpha(\tau - 4) + \alpha^2(\tau - 4)^2] = 0$$

будет иметь корень в этом промежутке. Но

$$f_2(4) = f_1(4) + 2e^{4\alpha} > 0, \\ f_2(6) = 1 + 2e^{2\alpha}(1 - 4\alpha) + 2e^{4\alpha}(1 - 6\alpha + 4\alpha^2).$$

Вычисление показывает, что $f_2(6)$ окажется отрицательным, т. е. процесс удара закончится в рассматриваемом промежутке времени, если $0,2409 < \alpha < 0,5787$. Далее также доказывается, что удар прекратится в один из моментов времени промежутка $6 < \tau < 8$ при $0,136 < \alpha < 0,2409$ и т. д.

3°. Переходим к определению перемещения. Имеем:

$$U(x, p) = -\frac{vl}{c} \frac{\operatorname{sh} r\xi}{r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r} = \\ = -\frac{vl}{c} [e^{-r(1-\xi)} - e^{-r(+\xi)}] \times \\ \times \left[1 + \frac{r-\alpha}{r+\alpha} e^{-2r} + \left(\frac{r-\alpha}{r+\alpha} \right)^2 e^{-4r} + \dots \right] \frac{1}{r+\alpha}.$$

отсюда находим:

$$\begin{aligned}
 -\frac{c}{vl} u(x, t) &= 0 && \text{при } 0 < \tau < 1 - \xi, \\
 &,, \quad \frac{1}{\alpha} \{ 1 - e^{-\alpha [\tau - (1 - \xi)]} \} && \text{при } 1 - \xi < \tau < 1 + \xi, \\
 &,, \quad \frac{1}{\alpha} \{ e^{-\alpha [\tau - (1 + \xi)]} - e^{-\alpha [\tau - (1 - \xi)]} \} && \text{при } 1 + \xi < \tau < 3 - \xi, \\
 &,, \quad \frac{1}{\alpha} \{ e^{-\alpha [\tau - (1 + \xi)]} - e^{-\alpha [\tau - (1 - \xi)]} \} + \\
 &\quad + 2 [\tau - (3 - \xi)] e^{-\alpha [\tau - (3 - \xi)]} - \\
 &\quad - \frac{1}{\alpha} \{ 1 - e^{-\alpha [\tau - (3 - \xi)]} \} && \text{при } 3 - \xi < \tau < 3 + \xi
 \end{aligned}$$

и т. д.

Пусть, например, $\alpha = 1$. Удар прекращается в момент времени

$$t = \frac{l}{c} \left(3 + \frac{1}{2} e^{-2} \right) = 3,202 \frac{l}{c}.$$

Уравнение движения ударяемого конца стержня будет:

$$\begin{aligned}
 -\frac{c}{vl} u(l, t) &= 1 - e^{-\tau} && \text{при } 0 < \tau < 2, \\
 &,, \quad -1 - e^{-\tau} + 2(\tau - 1) e^{-\tau - 2} && ,, \quad 2 < \tau < 3,202.
 \end{aligned}$$

4°. Продольное усилие на заделанном крае ($x = 0$) находится из соотношения:

$$\begin{aligned}
 -\frac{N(0, t)}{\rho c v} &= \frac{r}{r \operatorname{sh} r + \alpha \operatorname{ch} r} = \\
 &= 2 \left[e^{-r} + \frac{r - \alpha}{r + \alpha} e^{-3r} + \left(\frac{r - \alpha}{r + \alpha} \right)^2 e^{-5r} + \dots \right] \frac{r}{r + \alpha}
 \end{aligned}$$

и, следовательно, при $2s + 1 < \tau < 2s + 3$, где $s = 0, 1, 2, \dots$

$$-\frac{N(0, t)}{\rho c v} = \sum_{n=0}^s e^{-\alpha (\tau - 2n - 1)} l_n [2\alpha (\tau - 2n - 1)],$$

а при $\tau < 1$:

$$N(0, t) = 0.$$

5°. Если нижний конец стержня свободен, то изменяется краевое условие на этом конце:

$$u'(0, t) = 0.$$

Изображения перемещения и продольного усилия будут:

$$U(x, p) = -\frac{vl}{c} \frac{\operatorname{ch} r\xi}{r \operatorname{ch} r + \alpha \operatorname{sh} r},$$

$$N(x, t) \leftarrow -\rho c v \frac{r \operatorname{sh} r\xi}{r \operatorname{ch} r + \alpha \operatorname{sh} r}.$$

Дальнейшее вычисление ведётся тем же путём, что и выше.

В приведённом примере операционный метод позволил не только путём прямого и простого вычисления восстановить известные результаты решения классической задачи, но даже получить и некоторые новые результаты, именно дать общие выражения для продольного усилия в любой момент времени. Это легко было бы сделать и для перемещения $u(x, t)$, но сами выражения получились бы несколько более сложными. Указанные результаты отсутствуют у Сен-Венана; в другой форме и без указания на связь с известными полиномами Лагерра они были получены с помощью сложного и тонкого анализа в цитированной работе Е. Л. Николаи.

§ 28. Гидравлический удар в трубопроводе

1°. Рассматривается одномерное течение идеальной, слабо сжимаемой жидкости. Предполагается, что вначале скорость u_0 и давление p_0 жидкости одинаковы по всей длине трубопровода. Ось x направим по оси трубопровода и предположим, что абсциссе $x=0$ соответствует входное, а $x=l$ — выходное сечение трубопровода.

Вследствие некоторого возмущения, сообщаемого в начальный момент, указанный стационарный режим движения жидкости нарушается; в возмущённом движении скорость и давление будут некоторыми функциями времени и положения сечения:

$$u = u(x, t), \quad p = p(x, t).$$

Введём безразмерные величины

$$v = \frac{u - u_0}{u_0}, \quad q = \frac{p - p_0}{p_0} \quad (5.61)$$

и, полагая, что возмущение невелико, будем считать $v(x, t)$ и $q(x, t)$ малыми величинами.

Имеем следующие уравнения: уравнение одномерного течения жидкости (уравнение Эйлера)

$$\frac{\partial u}{\partial t} + \frac{\partial u}{\partial x} u = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}, \quad (5.62)$$

уравнение неразрывности

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} = 0 \quad (5.63)$$

и уравнение, связывающее плотность ρ и давление p . При малых изменениях плотности это уравнение будет:

$$\rho = \rho_0 (1 + s), \quad s = \frac{p}{E}, \quad (5.64)$$

где E — постоянная величина.

Далее введём безразмерные время τ и абсциссу ξ :

$$\tau = \frac{ct}{l}, \quad \xi = \frac{x}{l},$$

где постоянная c представляет скорость звука в жидкости:

$$c = \sqrt{\frac{E}{\rho_0}}.$$

При указанных обозначениях уравнения примут вид:

$$\begin{aligned} \frac{\partial v}{\partial \tau} + \frac{u_0}{c} \frac{\partial v}{\partial \xi} &= -\lambda \left(1 - \frac{p_0}{E}\right) \frac{\partial q}{\partial \tau}, \\ \frac{\partial q}{\partial \tau} + \frac{u_0}{c} \frac{\partial q}{\partial \xi} &= -\frac{1}{\lambda} \left(1 + \frac{p_0}{E}\right) \frac{\partial v}{\partial \xi}, \end{aligned} \quad (5.65)$$

где введено обозначение $\lambda = \frac{p_0 c}{Eu_0}$.

Мы заменили при этом в (62) члены $\frac{\partial u}{\partial x} u$ на $\frac{\partial u}{\partial x} u_0$, $\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x}$ на $\frac{1}{\rho_0} \left(1 - \frac{p_0}{E}\right) \frac{\partial p}{\partial x}$ и аналогичное упрощение ввели в (63). Можно пойти ещё на дальнейшее упрощение, именно, ограничиваясь рассмотрением медленных по сравнению со скоростью звука движений жидкости, отбросить в первом

уравнении слагаемое, содержащее множитель $\frac{u_0}{c}$. Пренебрегая ещё отношением $\frac{p_0}{E}$ по сравнению с 1, получаем уравнения распространения возмущений при одномерном течении жидкости в форме:

$$\frac{\partial v}{\partial \tau} = -\lambda \frac{\partial q}{\partial \xi}, \quad \frac{\partial q}{\partial \tau} = -\frac{1}{\lambda} \frac{\partial v}{\partial \xi}. \quad (5.66)$$

2°. Рассмотрим простейшую задачу, подробное и полное решение которой дано в классическом труде Н. Е. Жуковского о гидравлическом ударе:¹ входное сечение трубопровода соединено с источником питания неограниченной ёмкости, так что давление в нём можно считать постоянным и равным p_0 . По (61) это даёт краевое условие:

$$q(0, t) = 0. \quad (5.67)$$

В выходном сечении скорость (расход) жидкости меняется заданным образом во времени с помощью задвижки. Поэтому второе краевое условие можно записать в форме:

$$v(l, t) = \psi(\tau) = \frac{u(l, t) - u_0}{u_0}, \quad (5.68)$$

где $\psi(\tau)$ — относительное изменение расхода.

Будем считать, что нарушение стационарного режима произошло в начальный момент времени только вследствие перемещения задвижки, и примем поэтому простейшие начальные условия:

$$v(x, 0) = 0, \quad q(x, 0) = 0. \quad (5.69)$$

Изображающая система уравнений будет:

$$rV(\xi, r) = -\lambda \frac{dQ(\xi, r)}{d\xi}, \quad rQ(\xi, r) = -\frac{1}{\lambda} \frac{dV(\xi, r)}{d\xi}. \quad (5.70)$$

Краевые условия к ней:

$$Q(0, r) = 0, \quad V(1, r) = \Psi(r) \rightarrow \psi(t), \quad (5.71)$$

¹ „О гидравлическом ударе в водопроводных трубах“, Собр. соч., VII, ОНТИ, 1937.

где вместо p , написано r , что соответствует переходу в начальных функциях к безразмерному времени τ .

Её решение имеет вид:

$$V = \Psi(r) \frac{\operatorname{ch} r\xi}{\operatorname{ch} r}, \quad Q = -\frac{1}{\lambda} \Psi(r) \frac{\operatorname{sh} r\xi}{\operatorname{ch} r}. \quad (5.72)$$

Удобнее отсчёт абсциссы производить от места возмущения, т. е. от выходного сечения трубопровода:

$$\xi_1 = 1 - \xi.$$

Получаем:

$$V(\xi, r) = (1 - e^{-2r} + e^{-4r} - e^{-6r} + \dots) (e^{-r\xi_1} + e^{-r(2-\xi_1)} - e^{-r(2+\xi_1)} + e^{-r(4-\xi_1)} - e^{-r(4+\xi_1)} + \dots) \Psi(r)$$

и по теореме запаздывания находим:

при $0 < \tau < \xi_1$	$v(x, t) = 0,$
„ $\xi_1 < \tau < 2 - \xi_1$	$v(x, t) = \psi(\tau - \xi_1) = \psi_1,$
„ $2 - \xi_1 < \tau < 2 + \xi_1$	$v(x, t) = \psi_1 + \psi(\tau - 2 + \xi_1) = \psi_2,$
„ $2 + \xi_1 < \tau < 4 - \xi_1$	$v(x, t) = \psi_2 - \psi(\tau - 2 - \xi_1) = \psi_3,$
„ $4 - \xi_1 < \tau < 4 + \xi_1$	$v(x, t) = \psi_3 - \psi(\tau - 4 + \xi_1) = \psi_4$

и т. д.

Аналогично получаем выражение давления:

при $0 < \tau < \xi_1$	$-\lambda q(x, t) = 0,$
„ $\xi_1 < \tau < 2 - \xi_1$	$-\lambda q(x, t) = \psi(\tau - \xi_1) = \chi_1,$
„ $2 - \xi_1 < \tau < 2 + \xi_1$	$-\lambda q(x, t) = \chi_1 - \psi(\tau - 2 + \xi_1) = \chi_2,$
„ $2 + \xi_1 < \tau < 4 - \xi_1$	$-\lambda q(x, t) = \chi_2 - \psi(\tau - 2 - \xi_1) = \chi_3,$
„ $4 - \xi_1 < \tau < 4 + \xi_1$	$-\lambda q(x, t) = \chi_3 + \psi(\tau - 4 + \xi_1) = \chi_4$

и т. д.

Основываясь на этих результатах и имея график $\psi(\tau)$, можно дать графическое построение скорости и давления в любом сечении трубопровода.

3°. Рассмотрим теперь более сложную задачу: в выходном сечении трубопровода имеется запорный пружинный клапан (рис. 52), регулирующий сток жидкости (масла).¹

Пусть первоначальный натяг пружины, при котором клапан закрыт, равен F_0 и пусть C обозначает жесткость пружины

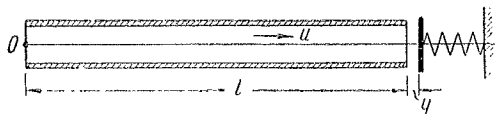


Рис. 52. Схема трубопровода с запорным клапаном.

клапана. При установившемся движении жидкости открытие клапана задается величиной y_0 , определяемой из уравнения равновесия клапана

$$p_0 \Omega = F_0 + Cy_0, \quad (5.73)$$

где Ω — площадь сечения клапана.

При возмущённом движении жидкости уравнение движения клапана будет:

$$M\ddot{y} + \gamma\dot{y} + Cy = p\Omega - F_0 = (p - p_0)\Omega + p_0\Omega,$$

где значение $p(x, t)$ берётся при $x = l$.

Обозначая

$$\frac{y - y_0}{y_0} = \eta$$

и пользуясь (61), получим:

$$\ddot{\eta} + \frac{\gamma}{M}\dot{\eta} + \frac{C}{M}\eta = \frac{\Omega p_0}{My_0} q(l, t) + \frac{1}{My_0}(p_0\Omega - F_0 - Cy_0),$$

причём последнее слагаемое в правой части по (73) обращается в нуль.

¹ Эта задача рассматривалась автором и А. И. Чекмаревым в 1938 г. Дальнейшее исследование было проведено А. А. Соколовым в работе „Критерий устойчивости линейных систем регулирования с распределёнными параметрами“. Инженерный сборник, т. II, № 2, 1946, стр. 3—26.

Переходя к безразмерному времени τ и вводя обозначения $2n = \frac{\gamma l}{Mc}$, $\sigma^2 = \frac{Cl^2}{Mc^2}$, $\frac{Cy_0}{\Omega p_0} = \delta$, получаем уравнение движения клапана в виде:

$$\frac{d^2\eta}{d\tau^2} + 2n \frac{d\eta}{d\tau} + \sigma^2 \eta = \frac{\sigma^2}{\delta} q(\tau). \quad (5.74)$$

Нужно еще связать величину η со значениями $v(x, t)$ и $q(x, t)$ на конце $x = l$ трубопровода. Для этого составим уравнение расхода жидкости через окна клапана:

$$\Omega u = \alpha b y \sqrt{\frac{2p}{\rho}},$$

где b — ширина окон, α — коэффициент расхода. Переписывая это соотношение в форме

$$\Omega u_0(1 + v) = \alpha b y_0(1 + \eta) \sqrt{\frac{2p_0}{\rho_0}} \sqrt{1 + q},$$

отбрасывая степени и произведения малых величин v , q , η и замечая, что по уравнению расхода в установившемся режиме

$$\Omega u_0 = \alpha b y_0 \sqrt{\frac{2p_0}{\rho_0}},$$

получаем:

$$v = \eta + \frac{1}{2} q, \text{ т. е. } \eta = v - \frac{1}{2} q. \quad (5.75)$$

Уравнения (74) и (75) дают краевые условия в выходном сечении трубопровода.

Краевое условие при $x = 0$ возьмем в форме

$$q(0, t) = \psi(\tau), \quad (5.76)$$

т. е. будем считать давление во входном сечении заданной функцией времени.

Начальные условия движения жидкости возьмем в простейшей форме:

$$v(x, 0) = 0, \quad q(x, 0) = 0. \quad (5.77)$$

Нужно ещё принять некоторые начальные условия движения клапана. Предполагая, что в начальный момент клапан

находился в покое, примем также наиболее простые условия:

$$\eta(0) = 0, \quad \dot{\eta}(0) = 0. \quad (5.78)$$

Итак, задача сводится к разысканию двух функций $v(x, t)$, $q(x, t)$, удовлетворяющих дифференциальным уравнениям (70) при краевых условиях (74), (76) и при начальных условиях (77) и (78).

Изображающая система уравнений будет:

$$rV(\xi, r) = -\lambda \frac{dQ(\xi, r)}{d\xi}, \quad rQ(\xi, r) = -\frac{1}{\lambda} \frac{dV(\xi, r)}{d\xi} \quad (5.79)$$

при краевых условиях:

$$Q(0, r) = \Psi(r) \rightarrow \psi(\tau), \quad (5.80)$$

$$(r^2 + 2\eta r + \sigma^2) H(r) = \frac{\sigma^2}{\delta} Q(1, r), \quad (5.81_1)$$

где

$$H(r) = V(1, r) - \frac{1}{2} Q(1, r) \rightarrow \eta(\tau). \quad (5.81_2)$$

Решение системы (79), удовлетворяющее условию (80), будет:

$$Q(\xi, r) = \Psi(r) \operatorname{ch} r\xi + C \operatorname{sh} r\xi, \\ V(\xi, r) = -\lambda \Psi(r) \operatorname{sh} r\xi - \lambda C \operatorname{ch} r\xi,$$

где C — пока неопределённая постоянная; подстановка во второе уравнение (81) даёт:

$$H(r) = -\left[\Psi(r) \left(\lambda \operatorname{sh} r + \frac{1}{2} \operatorname{ch} r \right) + C \left(\lambda \operatorname{ch} r + \frac{1}{2} \operatorname{sh} r \right) \right]. \quad (5.82)$$

Остаётся определить постоянную C , для чего следует воспользоваться первым уравнением (81), т. е. изображающим уравнением движения клапана. Найдя C и подставив её значение в (82), получим:

$$H(r) = \frac{\sigma^2 \lambda \Psi(r)}{\delta (r^2 + 2nr + \sigma^2) \left(\lambda \operatorname{ch} r + \frac{1}{2} \operatorname{sh} r \right) + \sigma^2 \operatorname{sh} r}. \quad (5.83)$$

В дальнейшем ограничимся рассмотрением движения клапана, т. е. будем строить начальную функцию для изображе-

ния (83). Чтобы упростить вычисление, проведение которого в общей алгебраической форме привело бы к очень громоздким формулам, примем $\lambda = \frac{1}{2}$, а численные значения других параметров зададим ниже.

Получаем:

$$H(r) = \frac{\frac{\sigma^2}{\delta} \Psi(r) e^{-r}}{r^2 + 2nr + \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{\delta}\right) + \frac{\sigma^2}{\delta} e^{-2r}} = \\ = \frac{\alpha \Psi(r) e^r}{r^2 + 2ar + \beta} \left(1 - \frac{\alpha e^{-2r}}{r^2 + 2nr + \beta}\right)^{-1},$$

где для краткости написано $\beta = \sigma^2 \left(1 + \frac{1}{\delta}\right)$, $\alpha = \frac{\sigma^2}{\delta}$.

Начальная функция будет строиться по отдельным этапам; разлагаем для этого выражение $H(r)$ в ряд:

$$H(r) = \Psi(r) \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1} e^{-(2k+1)r}}{(r^2 + 2nr + \beta)^{k+1}}. \quad (5.84)$$

4°. Рассмотрим случай

$$\Psi(r) = q_0 \rightarrow q_0 \sigma_0(t),$$

соответствующий резкому изменению давления во входном сечении в начальный момент; примем сначала, что движение клапана не демпфируется, т. е. $n = 0$.

Имеем изображение:

$$\frac{1}{r^2 + \beta^2} \rightarrow \frac{1}{\beta^2} (1 - \cos \beta \tau), \\ \frac{1}{(r^2 + \beta^2)^2} \rightarrow \frac{1}{\beta^4} \left(1 - \cos \beta \tau - \frac{1}{2} \beta \tau \sin \beta \tau\right), \\ \frac{1}{(r^2 + \beta^2)^3} \rightarrow \frac{1}{\beta^6} \left[1 - \left(1 - \frac{1}{8} \beta^2 \tau^2\right) \cos \beta \tau - \frac{5}{8} \beta \tau \sin \beta \tau\right], \\ \frac{1}{(r^2 + \beta^2)^4} \rightarrow \frac{1}{\beta^8} \left[1 - \left(1 - \frac{3}{16} \beta^2 \tau^2\right) \cos \beta \tau - \right. \\ \left. - \left(\frac{11}{16} \beta \tau - \frac{1}{48} \beta^3 \tau^3\right) \sin \beta \tau\right] \text{ и т. д.}$$

Имея эти соотношения и пользуясь теоремой запаздывания, получаем:

$$\begin{aligned}
 0 \leq \tau \leq 1 & \quad \eta = \eta_{0,1} = 0, \\
 1 \leq \tau \leq 3 & \quad \eta = \eta_{1,3} = \frac{q_0 \alpha}{\beta^2} \left[1 - \cos \beta (\tau - 1) \right], \\
 3 \leq \tau \leq 5 & \quad \eta = \eta_{3,5} = \eta_{1,3} + \frac{q_0 \alpha^2}{\beta^4} \left[1 - \cos \beta (\tau - 3) - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{2} \beta (\tau - 3) \sin \beta (\tau - 3) \right], \\
 5 \leq \tau \leq 7 & \quad \eta = \eta_{5,7} = \eta_{3,5} + \frac{q_0 \alpha^4}{\beta^6} \left\{ 1 - \left[1 - \right. \right. \\
 & \quad \left. - \frac{1}{8} \beta^2 (\tau - 5)^2 \right] \cos \beta (\tau - 5) - \\
 & \quad \left. - \frac{5}{8} \beta (\tau - 5) \sin \beta (\tau - 5) \right\}
 \end{aligned}$$

и т. д.

На рис. 53 построен график движения для случая $\sigma^2 = 2,5$ и $\delta = 0,1$.

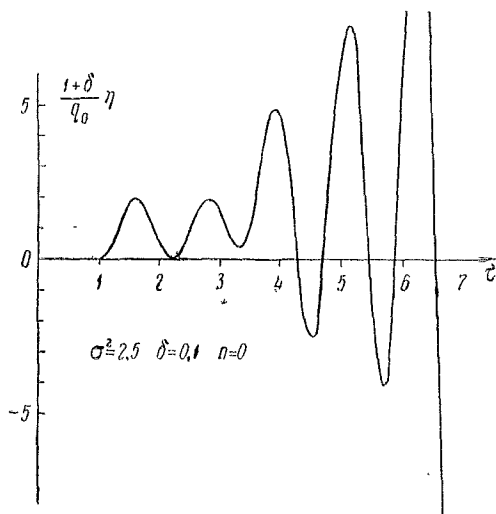


Рис. 53. График движения клапана при повышении давления во входном сечении трубопровода.

Получается быстро расходящийся колебательный процесс. Аналогично ведётся вычисление и при n , отличном от нуля.

На рис. 54 приведён график движения при указанных выше значениях σ и δ , но при $n = 0,3$.

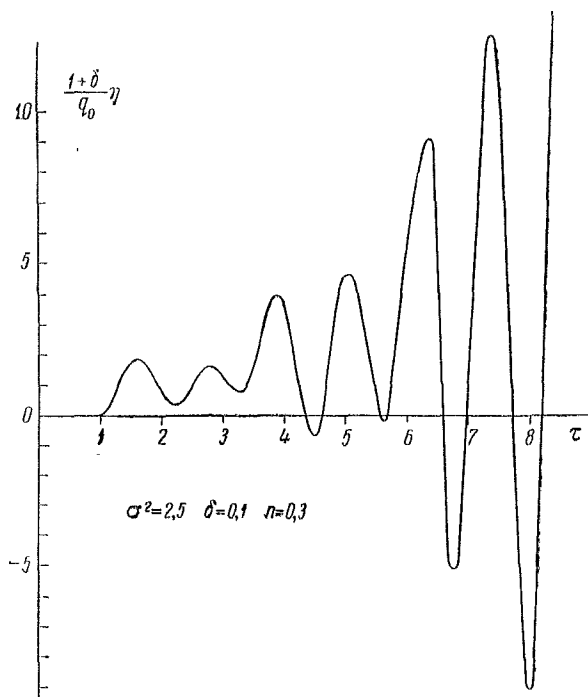


Рис. 54. График движения клапана при повышении давления во входном сечении трубопровода.

5°. Как второй пример рассмотрим случай периодического изменения давления во входном сечении; ограничиваясь случаем синусоидального изменения, примем:

$$p(0, t) = p_0 + \Delta p_0 \sin \Omega_0 t,$$

т. е.

$$\psi(\tau) = \frac{\Delta p_0}{p_0} \sin \frac{\Omega_0 l}{c} \tau \leftarrow q_0 \frac{\omega r}{r^2 + \omega^2},$$

где обозначено $\omega = \frac{\Omega_0 l}{c}$, $q_0 = \frac{\Delta p_0}{p_0}$.

Выражение (84) примет вид:

$$H(r) = q_0 \frac{\omega r}{\omega^2 + r^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1} e^{-(2k+1)r}}{(r^2 + 2nr + \beta^2)^{k+1}}. \quad (5.85)$$

Пусть $n = 0$, $\omega \neq \beta$. Получаем

$$0 \leq \tau \leq 1 \quad \eta = \eta_{0,1} = 0,$$

$$1 \leq \tau \leq 3 \quad \eta = \eta_{1,3} = \frac{q_0 \alpha}{\beta^2} \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}} \left[\sin \omega (\tau - 1) - \frac{\omega}{\beta} \sin \beta (\tau - 1) \right],$$

$$3 \leq \tau \leq 5 \quad \eta = \eta_{3,5} = \eta_{1,3} + \frac{q_0 \alpha^2}{\beta^4} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right)^2} \left[\sin \omega (\tau - 3) - \right. \\ \left. - \frac{3}{2} \frac{\omega}{\beta} \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) \sin \beta (\tau - 3) + \right. \\ \left. + \frac{1}{2} \frac{\omega}{\beta} \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) \beta (\tau - 3) \cos \beta (\tau - 3) \right],$$

$$5 \leq \tau \leq 7 \quad \eta = \eta_{5,7} = \eta_{3,5} + \frac{q_0 \alpha^3}{\beta^6} \frac{1}{\left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right)^3} \left\{ \sin \omega (\tau - 5) + \right. \\ \left. + \frac{7}{8} \frac{\omega}{\beta} \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) \left(1 - \frac{3}{7} \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) \beta (\tau - 5) \cos \beta (\tau - 5) - \right. \\ \left. - \frac{3}{8} \frac{\omega}{\beta} \left[4 \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right) + \right. \right. \\ \left. \left. + \left(1 - \frac{\omega^2}{\beta^2}\right)^2 \left\{ 1 - \frac{1}{3} \beta^2 (\tau - 5)^2 \right\} \right] \sin \beta (\tau - 5) \right\}$$

и т. д.

Процесс движения представлен на графике рис. 55 сплошной линией при $\omega = \frac{3}{2} \beta$ и при прежних численных значениях параметров σ^2 и δ .

Случай $\omega = \beta$ (резонанса) приводит к построению начальной функции для изображения

$$H(r) = q_0 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\alpha^{k+1} e^{-(2k+1)r}}{(r^2 + \beta^2)^{k+2}}.$$

Получаем:

$$0 \leq \tau \leq 1 \quad \eta = \eta_{0,1} = 0,$$

$$1 \leq \tau \leq 3 \quad \eta = \eta_{1,3} = \frac{q_0 \alpha}{2\beta^2} [\sin \beta (\tau - 1) - \beta (\tau - 1) \cos \beta (\tau - 1)],$$

$$3 \leq \tau \leq 5 \quad \eta = \eta_{3,5} = \eta_{1,3} + \frac{3q_0 \alpha^2}{8\beta^4} \left[\left(1 - \frac{1}{3} \beta^2\right) (\tau - 3)^2 \times \right. \\ \left. \times \sin \beta (\tau - 3) - \beta (\tau - 3) \cos \beta (\tau - 3) \right]$$

и т. д.

На рис. 55 соответствующий график изображён пунктиром.

На рис. 56 приведены еще графики начальной функции $\eta(\tau)$, построенные для случая синусоидального изменения давления во входном сечении трубопровода, но при $n \neq 0$.

Из всех приведённых графиков движения запорного клапана следует, что для значений параметров σ и δ , которые были взяты для расчёта, отклонения клапана от положения равновесия увеличиваются с течением времени; наличие сопротивления ($n \neq 0$) несколько уменьшает размахи, но не позволяет получить затухающего процесса колебаний. Возникает поэтому вопрос о выборе указанных параметров, обеспечивающем при нарушении стационарного режима затухающий

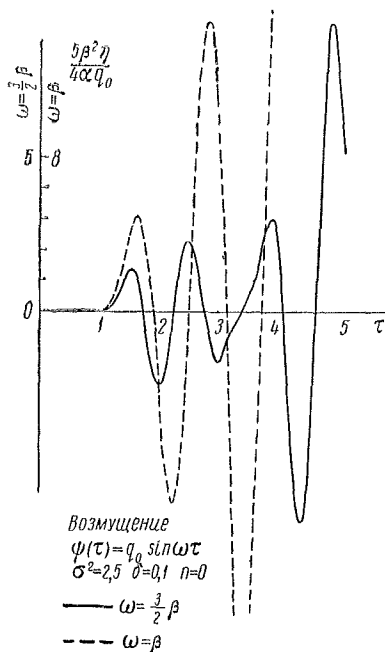


Рис. 55. График движения клапана при синусоидальном изменении давления во входном сечении трубопровода. Движение клапана не демпфируется.

процесс колебаний клапана. Возвращаясь к (83), отметим, что соответствующую начальную функцию $\eta(\tau)$ можно было

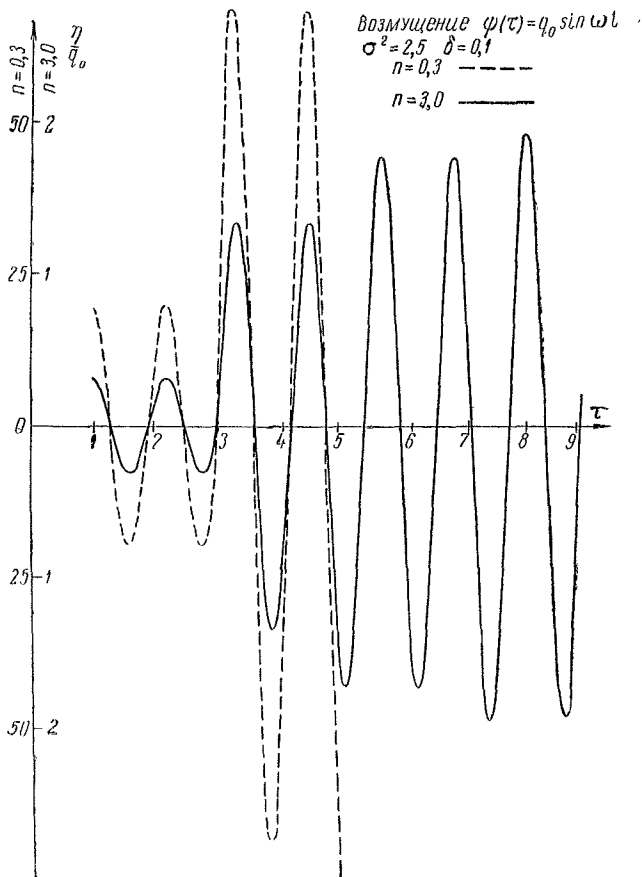


Рис. 56. График движения клапана при синусоидальном изменении давления во входном сечении трубопровода. Клапан снабжен демпфером.

бы найти для всех положительных значений τ , а не по отдельным этапам, используя вторую теорему разложения.

Для этого нужно, однако, знать корни трансцендентного уравнения

$$(r^2 + 2nr + \beta^2) \left(\lambda \operatorname{ch} r + \frac{1}{2} \operatorname{sh} r \right) + \frac{\sigma^2}{\delta} \operatorname{sh} r = 0, \quad (5.86)$$

получающегося при приравнивании нулю знаменателя (83). Чтобы колебания клапана, возникающие при нарушении стационарного режима, были затухающими, необходимо, чтобы все корни уравнения (86) имели отрицательные вещественные части. Возникает задача о разыскании критериев устойчивости для целых трансцендентных функций, аналогичных критериям Раута — Гурвица для полиномов. Первая попытка решения ее была дана А. А. Соколовым в цитированной выше работе, позже она стала предметом ряда исследований.¹

Уравнение, к которому приводит задача о запорном клапане, является частным случаем более общего уравнения

$$(a_0 + a_1 r + a_2 r^2) \operatorname{ch} r + (b_0 + b_1 r + b_2 r^2) \operatorname{sh} r = 0, \quad (5.87)$$

подробно рассмотренного в главе VII (§ 5) книги Н. Г. Чеботарёва и Н. Н. Меймана. Взятые выше для расчета значения параметров лежат вне области устойчивости, определяемой для уравнений типа (87).

¹ Н. Г. Чеботарёв и Н. Н. Мейман, Проблема Раута — Гурвица для полиномов и целых функций. Труды Математич. ин-та им. В. А. Стеклова, т. XXVI, 1949; Л. С. Понтрягин, О нулях некоторых элементарных трансцендентных функций. Изв. АН СССР, сер. матем., 6, 1942, стр. 115—134.

Г Л А В А VI

ОБЩАЯ ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ

В первой главе были выведены основные теоремы операционного исчисления и даны изображения нескольких простейших функций — целой степени, показательной функции, тригонометрических функций. Этого оказалось достаточным для решения большого числа задач динамики и сопротивления материалов, сводящихся к обыкновенным линейным дифференциальным и разностным уравнениям с постоянными коэффициентами.

Простейшие задачи, относящиеся к уравнениям частных производных, как было показано в пятой главе, также решаются с помощью этих же скромных средств.

Изображение определяется по заданной начальной функции с помощью интеграла Лапласа:

$$L\{f(t)\} = \frac{F(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt. \quad (6.1)$$

Для решения обратной задачи, т. е. нахождения начальной функции по её изображению, служил „каталог изображений“ и основные теоремы операционного исчисления — свёртывания, запаздывания, смещения и первая и вторая теоремы разложения.

Но многочисленные задачи приводят к изображениям, не сводящимся с помощью перечисленных приёмов к имеющимся в каталоге. Необходимо поэтому располагать общим средством построения начальной функции по её изображению. Речь идет, таким образом, о решении интегрального уравнения (1) относительно неизвестной функции $f(t)$. Оно даётся формулой

обращения Римана — Меллина, на фундаментальное значение которой в операционном исчислении указал в 1916 г. английский математик Бромвич.¹

§ 29. Формула обращения

1°. Напомним, что рассматриваемые начальные функции суть функции вещественного переменного t , обращающиеся в нуль при $t < 0$, кусочно-непрерывные при $t > 0$ и имеющие экспоненциальный порядок роста при больших значениях t :

$$|f(t)| < Me^{s_0 t}.$$

При этих условиях интеграл Лапласа (1) сходится абсолютно и представляет функцию комплексного переменного p , регулярную в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$,² и если p неограниченно возрастает по модулю, оставаясь в этой полуплоскости, то

$$\lim_{|p| \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0. \quad (6.2)$$

Формула обращения, дающая выражение начальной функции $f(t)$ по её изображению $F(p)$, имеет вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}, \quad (6.3)$$

причём число σ может быть произвольным, но большим, чем s_0 ; иными словами, интегрирование в (3) производится по любой прямой в плоскости $p = s + i\omega$, параллельной мнимой оси и расположенной в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$. В дальнейшем для краткости будем обозначать этот путь через L_1 (рис. 57). Заметим, что

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p} = \frac{1}{2\pi i} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \int_{\sigma - i\omega}^{\sigma + i\omega} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}. \quad (6.4)$$

¹ T. J. Bromwich, Normal coordinates in dynamical systems. Proc. Lond. Math. Soc. (2), vol. 15, 1916, стр. 401.

² Эта форма записи указывает, что границей полуплоскости является прямая, проходящая справа от прямой $\operatorname{Re} p = s_0$.

Нужно доказать два положения. Во-первых, что из представления $F(p)$ в форме лапласова интеграла (1) следует формула обращения. Во-вторых, надо убедиться, что обратно из (4) следует представимость $F(p)$ в форме лапласова интеграла (1).

Требуется ещё убедиться, что значение интеграла (3) не зависит от выбора постоянной σ в полуплоскости $\operatorname{Re} p > s_0$ и что при $t < 0$ этот интеграл обращается в нуль.

Конечно, всё это будет иметь место лишь при некоторых ограничениях, накладываемых как на $f(t)$, так и на $F(p)$.

2°. Доказательство первого положения основывается на интегральной формуле Фурье, которую мы считаем известной читателю.¹

Введём в рассмотрение функцию

$$\psi(t) = e^{-\sigma t} f(t), \quad (6.5)$$

причём $\sigma > s_0$.

К перечисленным выше условиям, определяющим принадлежность $f(t)$ к классу рассматриваемых начальных функций, добавим требование дифференцируемости $f(t)$ в точках, где она непрерывна.

Тогда будут соблюдены более чем достаточные условия представимости $\psi(t)$ в форме интегралов Фурье:

$$\psi(t) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} \psi(\tau) e^{-\omega(\tau-t)i} d\tau, \quad (6.6)$$

причём в точках разрыва нужно левую часть заменить на

$$\frac{1}{2} [\psi(t-0) + \psi(t+0)].$$

¹ См., например, В. И. Смирнов, Курс высшей математики, т. II, ГТТИ, 1937, стр. 392.

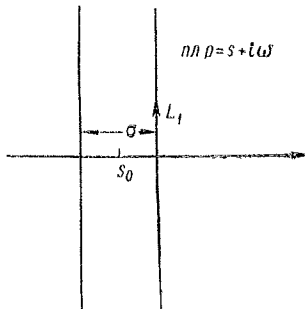


Рис. 57. Путь интегрирования в формуле обращения.

Подставляем в (6) значение (5) функции $\psi(t)$ и умножаем обе части на $e^{\sigma t}$; получаем:

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\omega \int_0^{\infty} e^{(\sigma + i\omega)t} e^{-(\sigma + i\omega)\tau} e^{\sigma\tau} \psi(\tau) d\tau = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} e^{(\sigma + i\omega)t} d\omega \int_0^{\infty} e^{-(\sigma + i\omega)\tau} f(\tau) d\tau. \end{aligned} \quad (6.7)$$

Обозначая теперь

$$\sigma + i\omega = p,$$

заменим внутренний интеграл в (7) его значением (1); при фиксированном σ путь интегрирования представит прямую L_1 , параллельную мнимой оси и отстоящую от неё на расстоянии σ ; замечая ещё, что $dp = i d\omega$, получим из (7) формулу обращения (4):

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}.$$

3° Переходим к доказательству второго положения: если $f(t)$ определено формулой (4), то $F(p)$ выражается через $f(t)$ с помощью интеграла Лапласа (1).

Достаточными для этого являются следующие условия: а) $F(p)$ — регулярная функция в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$, б) отношение $\frac{F(p)}{p}$ при любом $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ и при $\operatorname{Im} p = \omega \rightarrow \infty$ стремится к нулю, в) интеграл

$$\int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) \frac{dp}{p}$$

при $\sigma \geq s_1 > s_0$ сходится абсолютно, т. е. интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{F(\sigma + i\omega)}{\sigma + i\omega} \right| d\omega$$

сходится.

Заметим, что, как говорилось в § 2, изображения рассматриваемого класса начальных функций удовлетворяют условиям а) и б), причём б) представляет иную формулировку свойства изображений, о котором упоминалось выше — см. формулу (2).

Умножим обе части (4) на $e^{-p_1 t}$, где $\operatorname{Re} p > \sigma$, и проинтегрируем по t в пределах $(0, \infty)$; получим

$$\int_0^{\infty} e^{-p_1 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} e^{-p_1 t} dt \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}.$$

При условии в) в интеграле справа можно переменить порядок интегрирования, поэтому

$$\int_0^{\infty} e^{-p_1 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_0^{\infty} F(p) \frac{dp}{p} \int_0^{\infty} e^{-(p_1 - p)t} dt.$$

Но $\operatorname{Re} p_1 > \operatorname{Re} p > \sigma$, т. е.

$$\int_0^{\infty} e^{-(p_1 - p)t} dt = \frac{1}{p_1 - p}$$

и значит,

$$\int_0^{\infty} e^{-p_1 t} f(t) dt = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} \frac{F(p) dp}{p(p_1 - p)}. \quad (6.8)$$

Рассмотрим теперь интеграл по замкнутому контуру рис. 58, составленному из дуги окружности Γ и отрезка прямой, параллельной мнимой оси между точками $\sigma + i\omega$ и $\sigma - i\omega$:

$$J = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{F(p) dp}{p(p - p_1)} + \int_{\sigma + i\omega}^{\sigma - i\omega} \frac{F(p) dp}{p(p - p_1)} \right]. \quad (6.9)$$

Подинтегральная функция имеет полюс в точке $p = p_1$; это её единственный полюс, так как функция $\frac{1}{p} F(p)$ в

области, ограниченной рассматриваемым контуром, регулярна. На основании формулы Коши поэтому имеем:

$$J = \frac{F(p_1)}{p_1}. \quad (6.10)$$

Перейдём в (9) к пределу: $\omega \rightarrow \infty$, а следовательно, $R \rightarrow \infty$. Используя условие б) или, что то же самое, (2), нетрудно убедиться, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma} \frac{F(p) dp}{p(p-p_1)} = 0.$$

Далее имеем

$$\begin{aligned} \lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{F(p) dp}{p(p-p_1)} &= \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} \frac{F(p) dp}{p(p_1-p)}. \end{aligned}$$

По (8), (9), (10) теперь получаем:

$$\int_0^{\infty} e^{-pt} f(t) dt = \frac{F(p_1)}{p_1}, \quad (6.11)$$

что и требовалось доказать.

4°. Независимость интеграла (4) от выбора постоянной σ^1 легко устанавливается из рассмотрения интеграла

$$J = \frac{1}{2\pi i} \int e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}$$

по контуру прямоугольника, представленного на рис. 59.

В области, ограниченной этим контуром, подинтегральная функция регулярна, и по теореме Коши $J=0$. Пусть теперь $\omega \rightarrow \infty$; интегралы по горизонтальным участкам дадут

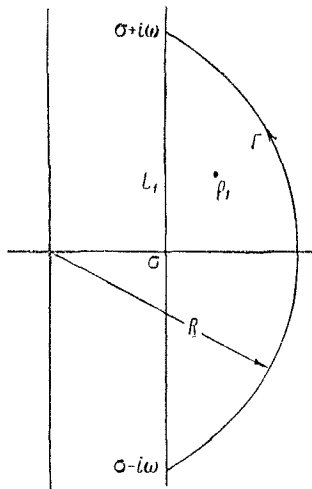


Рис. 58. К выводу интеграла Лапласа из формулы обращения.

¹ Конечно, при условии, что прямая L_1 остаётся в полуплоскости $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$.

в пределе нуль, так как путь интегрирования конечен, а под-интегральное выражение по условию б) стремится к нулю. Таким образом:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \left[\int_{\sigma_1 - i\omega}^{\sigma_1 + i\omega} F(p) e^{pt} \frac{dp}{p} + \int_{\sigma_1 + i\omega}^{\sigma_1 - i\omega} F(p) e^{pt} \frac{dp}{p} \right] = 0,$$

т. е.

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} F(p) e^{pt} \frac{dp}{p} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} F(p) e^{pt} \frac{dp}{p},$$

что и требовалось доказать.

5°. Нам нужно ещё проверить, что функция $f(t)$, определяемая по формуле обращения (4), обращается в нуль

при $t < 0$. Для этого воспользуемся известной *леммой Жордана*, которая будет в дальнейшем иметь и другие важные приложения.

Лемма Жордана. Пусть $p = Re^{t\varphi}$ и $-\frac{\pi}{2} < \varphi < \frac{\pi}{2}$, т. е. $\operatorname{Re} p > 0$. Рассмотрим функцию $F(p)$ такую, что

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0, \quad (6.12)$$

причём стремление к пределу равномерно относительно аргумента φ ; это значит, что при $R > R_0$ можно указать неза-

Рис. 59. К доказательству независимости интеграла от выбора прямой L_1 .

висящее от φ , принадлежащего указанному промежутку, такое число ε , что

$$\left| \frac{F(p)}{p} \right| < \varepsilon. \quad (6.13)$$

Через C_1 обозначим полуокружность радиуса R в правой полуплоскости p с центром в начале координат. Лемма состоит в утверждении: при $t < 0$

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{C_1} F(p) e^{pt} \frac{dp}{p} = 0. \quad (6.14)$$

Доказательство. Вдоль C_1 имеем

$$|e^{pt}| = e^{tR \cos \varphi}, \quad |dp| = |tRe^{i\varphi} d\varphi| = R d\varphi$$

и по (13) имеем

$$\begin{aligned} \left| \int_{C_1} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p} \right| &\leq \int_{C_1} \left| e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp \right| \leq \varepsilon R \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} e^{tR \cos \varphi} d\varphi = \\ &= 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{tR \cos \varphi} d\varphi. \end{aligned}$$

Полагая $\psi = \frac{\pi}{2} - \varphi$, переписываем это неравенство в виде:

$$\left| \int_{C_1} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p} \right| \leq 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{tR \sin \psi} d\psi. \quad (6.15)$$

При $0 \leq \psi \leq \frac{\pi}{2}$ синусоида проходит выше, чем прямая, соединяющая начало координат с её вершиной, т. е. имеет место неравенство $\sin \psi \geq \frac{2\psi}{\pi}$.

Поэтому неравенство (15) будет при $t < 0$ усилено, если заменить в нём $\sin \psi$ указанной меньшей величиной. Получим

$$\left| \int_{C_1} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p} \right| < 2\varepsilon R \int_0^{\frac{\pi}{2}} e^{\frac{2tR\psi}{\pi}} d\psi = \frac{2\varepsilon R\pi}{2tR} (e^{tR} - 1) < \frac{\varepsilon\pi}{|t|},$$

что и доказывает лемму, поскольку ε может быть сделано произвольно малым.

Из хода доказательства леммы следует, что она останется справедливой, если интегрирование вести не по всей полуокружности, а по её части, например по дуге Γ рис. 58. Возвращаясь к замкнутому контуру на этом рисунке, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\Gamma} \frac{e^{pt}}{p} F(p) dp + \int_{\sigma-i\omega}^{\sigma+i\omega} \frac{e^{pt}}{p} F(p) dp \right] = 0,$$

так как подинтегральная функция регулярна в области, ограниченной этим контуром. Первый интеграл в этом выражении при $R \rightarrow \infty$, на основании леммы Жордана, при $t < 0$ обращается в нуль. Получаем:

$$\lim_{\omega \rightarrow \infty} \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma - i\infty}^{\sigma + i\infty} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp = 0$$

при $t < 0$, что и требовалось доказать.

6°. В предшествующем было доказано, что из лапласова изображения (1) функции $f(t)$ следует формула обращения (4) и что обратно из (4) при условиях а), б), в) п. 3° следует представимость $f(t)$ с помощью формулы (6.3). Была показана независимость функции $f(t)$ от выбора прямой интегрирования L_1 в плоскости $\operatorname{Re} p \geq s_1 > s_0$ и проверено, что функция $f(t)$, определяемая по формуле обращения, при $t < 0$ оказывается равной нулю.

Итак, допустим, что полученное при решении некоторой задачи изображение $F(p)$ удовлетворяет указанным условиям а), б), в). Обозначим через $f(t)$ функцию, определяемую с помощью $F(p)$ по формуле обращения (4). Согласно п. 3° можно утверждать, что $\frac{1}{p} F(p)$ в этом случае представима интегралом Лапласа от $f(t)$. Но можно ли к этому добавить, что формула обращения (4) даёт искомую *начальную* функцию $f(t)$? Утвердительный ответ может быть дан лишь при условии, что $f(t)$ удовлетворяет требованиям, которые ставились при выводе формулы (4), т. е. что $f(t)$ представима с помощью интеграла Фурье. Но тот факт, что $F(p)$ удовлетворяет перечисленным условиям а), б), в), еще ничего не говорит о такой представимости функции $f(t)$.

Создавшееся противоречивое положение не имеет, однако, существенного значения по крайней мере для прикладных целей, которые ставит перед собой эта книга. Оно обязывает, получив решение задачи, т. е. найдя $f(t)$, проверить, что эта функция представима интегралом Фурье, а это класс функций достаточно широкий, чтобы можно было а priori предполагать, что подавляющее большинство прикладных задач приведёт к решениям, заключающимся в этом классе.

7°. При практическом использовании формулы обращения (4) путь интегрирования L_1 часто заменяют другими путями и контурами, допускающими вычисление интеграла с помощью теоремы Коши о вычетах.

Важное значение приобретает при этом преобразовании пути интегрирования формулировка леммы Жордана, несколько отличная от приведённой в 5°. Пусть $p = Re^{i\varphi}$, где

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leq \varphi \leq \pi \quad \text{и}$$

$$-\pi \leq \varphi \leq -\frac{\pi}{2} + \varepsilon \quad \text{и } \varepsilon$$

может быть взято сколь угодно малым. Если при этом

$$\left| \frac{F(p)}{p} \right| < CR^{-k}, \quad \text{где}$$

C и $k > 0$ — постоянные,

то $\int e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}$, взятый вдоль дуг $BB'C$ и $AA'C$ окружности Γ_1 , стремится к нулю при условии, что $t > 0$ (рис. 60).

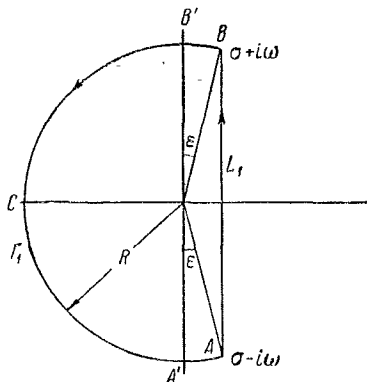


Рис. 60. К доказательству леммы Жордана.

Интеграл по дуге BC разобьём на два: по дуге BB' и по BC . Для второй из этих дуг нужно повторить с понятными изменениями рассмотрение п. 5°. На дуге BB' имеем:

$$|e^{pt}| = e^{t \operatorname{Re} p} \leq e^{\sigma t}.$$

Замечая еще, что $dp = R d\varphi$, получим:

$$\begin{aligned} |I_{BB'}| &= \left| \int e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp \right| < CR^{-k+1} e^{\sigma t} \int_{\frac{\pi}{2}-\varepsilon}^{\frac{\pi}{2}} d\varphi = \\ &= CR^{-k+1} e^{\sigma t} \varepsilon = CR^{-k} e^{\sigma t} R\varepsilon. \end{aligned}$$

Но $\lim_{R \rightarrow \infty} R\varepsilon = 0$ и, значит, $\lim_{R \rightarrow \infty} I_{BB'} = 0$.

Подобным же образом рассматриваются интегралы по дугам CA' и $A'A$. Очевидным следствием этой формулировки леммы Жордана является возможность при условиях, указанных в начале этого пункта, замены пути интегрирования L_1

в формуле обращения замкнутым контуром $ABCA$ при $R \rightarrow \infty$ и $\omega \rightarrow \infty$. Для краткости этот контур будет в дальнейшем обозначаться $L = L_1 + \Gamma_1$. Формула обращения (4) принимает при этом вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}. \quad (6.16)$$

Пусть $p = p_s$, где $s = 1, 2, \dots, n$ — изолированные особенности — полюсы или точки разветвления функции $F(p)$; по построению прямой L_1 все они расположены внутри L . Как указано на рис. 61, проведём из точек p_s друг с другом не пересекающиеся разрезы, углы наклона которых можно выбирать, сообразуясь с удобством и простотой дальнейшего вычисления (на рис. 61 разрезы показаны пунктиром).

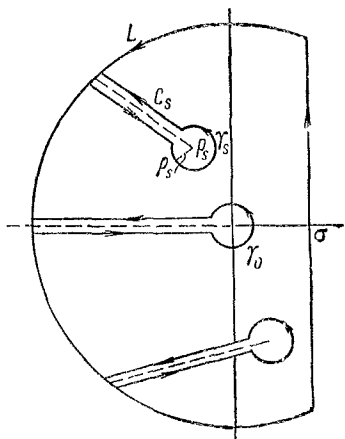


Рис. 61. Замена прямой L_1 совокупностью путей C_s .

Каждую из особых точек окружим далее контуром C_s , составленным из прямой, параллельной разрезу и идущей на бесконечно малом расстоянии от него из бесконечности по нижнему краю, кружка γ_s радиуса ρ_s вокруг точки p_s и прямой, параллельной первой и уходящей на бесконечность по верхнему краю разреза.

В области, ограниченной контуром L и контурами C_s , подынтегральная функция однозначна и не имеет особенностей. Поэтому

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_L e^{pt} F(p) \frac{dp}{p} = \frac{1}{2\pi i} \sum_{s=1}^n \int_{C_s} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}. \quad (6.17)$$

Конечно, если особенностью является полюс, то нет нужды в проведении разреза — контур C_s заменяется кружком γ_s ,

и соответствующий интеграл будет равен вычету подинтегральной функции в этом полюсе. Заметим, что число n может неограниченно возрастать при $R \rightarrow \infty$ и, если все особенности — полюсы, т. е. $F(p)$ — мероморфная функция, то на основании (17) сразу можно получить обобщённую вторую теорему разложения Хевисайда (§ 4), которой мы пользовались выше, но привели без доказательства.

Отметим ещё частный случай: начало координат является единственной особенностью — точкой разветвления функции $F(p)$. Формула (17) принимает вид:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}, \quad (6.18)$$

где контур C_0 показан на рис. 61.

§ 30. Изображение дробной степени и логарифма. Правило Хевисайда

1°. Рассмотрим изображение

$$F(p) = p^{-\alpha},$$

где $\operatorname{Re} \alpha > -1$. Имеем:

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{1}{p^{\alpha+1}}$$

и при $\operatorname{Re}(\alpha + 1) > 0$:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0,$$

т. е. условия возможности применения формулы обращения в виде (18), перечисленные в п. 7° § 29, выполнены; получаем:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{pt}}{p^{\alpha+1}} dp.$$

Делая замену $pt = \zeta$, что при $t > 0$ не влияет на путь интегрирования, получаем:

$$f(t) = \frac{t^\alpha}{2\pi i} \int_{C_0} e^\zeta \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha+1}}. \quad (6.19)$$

Если ввести обозначение

$$\chi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha+1}}, \quad (6.20)$$

то можно написать, таким образом, что при $\operatorname{Re} \alpha > -1$:

$$\chi(\alpha) t^{\alpha} \leftarrow \frac{1}{p^{\alpha}}. \quad (6.21)$$

Остаётся вычислить интеграл (20). Разобьём его на три интеграла: I_1 — по кружку γ_0 , I_2 и I_3 — по нижнему и верхнему краям разреза.

Примем сначала, что $\operatorname{Re} \alpha < 0$. На окружности γ_0 :

$$\zeta = \rho_0 e^{i\varphi}, \quad d\zeta = \rho_0 e^{i\varphi} i d\varphi$$

и, следовательно,

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_0} e^{\zeta} \frac{d\zeta}{\zeta^{\alpha+1}} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{\rho_0 (\cos \varphi + i \sin \varphi)} \rho_0^{-\alpha} d\varphi$$

и при $\rho_0 \rightarrow 0$ имеем $I_1 \rightarrow 0$, так как $\operatorname{Re} \alpha < 0$.

На нижнем крае разреза $\zeta = x e^{-i\pi}$, где $x = |\zeta|$; получаем

$$I_2 = \frac{e^{\pi i}}{2\pi i} \int_0^{\rho_0} e^{-x} \frac{dx}{x^{\alpha+1}} = -\frac{e^{\pi i}}{2\pi i} \int_{\rho_0}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}.$$

На верхнем крае аналогично найдём:

$$I_3 = \frac{e^{-\pi i}}{2\pi i} \int_{\rho_0}^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}.$$

Итак, при $\operatorname{Re} \alpha < 0$ получаем:

$$\chi(\alpha) = \frac{\sin(-\alpha\pi)}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}. \quad (6.22)$$

Вспомним теперь определение гамма-функции Эйлера.¹

$$\Gamma(s) = \int_0^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx, \quad (6.23)$$

где $\operatorname{Re} s > 0$. Полагая $s = -\alpha$, получим:

$$\Gamma(-\alpha) = \int_0^{\infty} e^{-x} \frac{dx}{x^{\alpha+1}}$$

при $\operatorname{Re} \alpha < 0$; подстановка в (22) теперь даёт:

$$\chi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{\zeta}}{\zeta^{\alpha+1}} d\zeta = \frac{\sin(-\alpha\pi)}{\pi} \Gamma(-\alpha). \quad (6.24)$$

Эта формула получена в предположении, что $\operatorname{Re} \alpha < 0$; но такое ограничение было вызвано только способом вычисления, а не существом дела. Действительно, интеграл в левой части (24) сходится при любом α и дифференцируем по α любое число раз; он представляет поэтому целую функцию α и формула (24) как раз и даёт представление мероморфной функции $\Gamma(-\alpha)$ в виде частного двух целых функций: $\chi(\alpha)$ и $\sin \alpha\pi$.

Теперь воспользуемся известным соотношением теории гамма-функций:

$$\Gamma(s) \Gamma(1-s) = \frac{\pi}{\sin \pi s} \quad \text{или} \quad \Gamma(-\alpha) \Gamma(1+\alpha) = \frac{\pi}{\sin(-\alpha\pi)},$$

позволяющим записать (24) в форме:

$$\chi(\alpha) = \frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} \frac{e^{\zeta} d\zeta}{\zeta^{\alpha+1}} = \frac{1}{\Gamma(1+\alpha)}.$$

2°. Соотношение (21) принимает теперь вид:

$$\frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \leftarrow \div \frac{1}{p^{\alpha}} \quad (6.25)$$

¹ Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции. ОНТИ. 1935, стр. 3–10.

и оно имеет место при $\operatorname{Re} \alpha > -1$, так как только в этом предположении можно было формулу обращения (4) писать в форме (18). Иными словами, формула

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} = \frac{t^{\alpha}}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (6.26)$$

справедлива при любом α , но лишь при $\operatorname{Re} \alpha > -1$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}} = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_1} e^{pt} \frac{dp}{p^{\alpha+1}},$$

т. е. соотношение (25) имеет место лишь при этом ограничении.

Вернёмся к важной формуле (25), дающей изображение степени. При целом положительном n :

$$\Gamma(n+1) = n!$$

и мы снова приходим к хорошо известному соотношению

$$\frac{t^n}{n!} \longleftrightarrow \frac{1}{p^n}.$$

Другой важный случай, когда α равно целому числу с половиной. Пусть сначала $\alpha = -\frac{1}{2}$. Имеем

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \sqrt{\pi} \quad (6.27)$$

и, значит,

$$\sqrt{p} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}}. \quad (6.28)$$

Из (27) и известного соотношения теории гамма-функций:

$$s \Gamma(s) = \Gamma(s+1)$$

получаем:

$$\begin{aligned} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) &= \frac{1}{2} \Gamma\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2} \sqrt{\pi}, \\ \Gamma\left(\frac{5}{2}\right) &= \frac{3}{2} \Gamma\left(\frac{3}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 2} \sqrt{\pi} \end{aligned}$$

и вообще

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) = \frac{1 \cdot 3 \dots (2n-1)}{2^n} \sqrt{\pi}.$$

Находим

$$\frac{1}{\sqrt{p}} \div 2 \sqrt{\frac{t}{\pi}} \quad (6.29)$$

и вообще при $n = 1, 2, 3, \dots$:

$$\frac{1}{p^n \sqrt{p}} \div \frac{2^{n+1} t^n}{1 \cdot 3 \dots (2n+1)} \sqrt{\frac{t}{\pi}}. \quad (6.30)$$

Заметим ещё, что из формулы

$$\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right) \Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{\pi}{\sin\left(n + \frac{1}{2}\right)\pi} = (-1)^n \pi,$$

и из приведённого выше выражения $\Gamma\left(n + \frac{1}{2}\right)$ следует:

$$\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right) = \frac{(-1)^n \sqrt{\pi} 2^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}.$$

Полагая поэтому $\alpha = -n - \frac{1}{2}$ в (26), найдём при $n = 1, 2, \dots$:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{C_0} e^{pt} p^{-\frac{1}{2}} dp = \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2n-1)}{2^n t^n} (-1)^n \sqrt{\frac{t}{\pi}}. \quad (6.31)$$

3°. Продифференцируем обе части (21) по параметру α ; получим:

$$\frac{t^\alpha \ln t}{\Gamma(\alpha+1)} = \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \cdot \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)} \div \frac{1}{p^\alpha} \ln\left(\frac{1}{p}\right).$$

Умножая теперь обе части соотношения (21) на

$$\Psi(\alpha+1) = \frac{\Gamma'(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha+1)} \quad (6.32)$$

и складывая с только что полученным соотношением, найдём:

$$\frac{t^\alpha \ln t}{\Gamma(\alpha+1)} \div \frac{1}{p^\alpha} \left[\ln \frac{1}{p} + \Psi(\alpha+1) \right]. \quad (6.33)$$

Пусть, в частности, $\alpha = 0$. Получаем изображение логарифма

$$\ln t \leftrightarrow \ln \frac{1}{p} - C, \quad (6.34)$$

где

$$C = \Psi(1) = \frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)} = 0,57722 \dots$$

известная Эйлерова постоянная. Замечая далее, что при n целом:

$$\Psi(n+1) = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - C,$$

получаем также из (33):

$$\frac{t^n}{n!} \ln t \leftrightarrow \frac{1}{p^n} \left(\ln \frac{1}{p} + 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} - C \right). \quad (6.35)$$

4°. Снова предположим, что $\frac{1}{p} F(p)$ удовлетворяет требованиям леммы Жордана в формулировке п. 7° § 29 и что начало координат ($p=0$) является алгебраической точкой разветвления функции $F(p)$, а других особенностей на конечном расстоянии эта функция не имеет. Можно представить $F(p)$ рядом

$$F(p) = p^\alpha (A_0 + A_1 p^k + A_2 p^{2k} + \dots), \quad (6.36)$$

где k — рационально и положительно, причём этот ряд равномерно сходится во всей плоскости p .

Применив формулу обращения в форме (18), имеем:

$$f(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_0} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{2\pi i} \int_{\sigma_0} e^{pt} p^{nk+\alpha-1} dp.$$

По (26) теперь получаем:

$$F(p) \leftrightarrow f(t) = \frac{1}{t^\alpha} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{A_n}{\Gamma(1-\alpha-nk)} t^{-nk}, \quad (6.37)$$

причём в этом разложении нужно вычеркнуть слагаемые, для которых

$$\frac{1}{\Gamma(1-\alpha-nk)} = 0,$$

т. е. те, для которых $\alpha + nk$ является целым положительным числом. Это правило принадлежит Хевисайду, но не было им достаточно обосновано.

5°. В качестве примера рассмотрим изображение

$$F(p) = e^{-a\sqrt{p}} \quad (a > 0).$$

Имеем вдоль дуги BCA рис. 60:

$$\left| \frac{F(p)}{p} \right| = \frac{1}{R} e^{-a\sqrt{R} \cos \frac{\varphi}{2}}.$$

На этой дуге $\cos \frac{\varphi}{2} > 0$ и, следовательно,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{F(p)}{p} = 0,$$

т. е. применение правила Хевисайда законно. Имеем далее:

$$e^{-a\sqrt{p}} = 1 - a\sqrt{p} + \frac{(a\sqrt{p})^2}{2!} - \frac{(a\sqrt{p})^3}{3!} + \dots,$$

т. е. в рассматриваемом случае в (36):

$$\alpha = 0, \quad k = \frac{1}{2}, \quad A_0 = 1, \quad A_1 = -a, \quad A_3 = -\frac{a^3}{3!} \quad \text{и т. д.}$$

Получаем по (37):

$$e^{-a\sqrt{p}} \rightarrow f(t) = 1 - \sum_{r=1, 3, 5, \dots} \frac{a^r}{r!} t^{-\frac{r}{2}} \frac{1}{\Gamma(1 - \frac{r}{2})}. \quad (6.38)$$

Полученный ряд может быть выражен через известный интеграл вероятности:

$$\Phi(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^x e^{-u^2} du = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{x^2} \frac{e^{-v}}{\sqrt{v}} dv. \quad (6.39)$$

Заменяя e^{-u^2} его разложением в ряд и интегрируя почленно, получим:

$$\begin{aligned} \Phi(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(x - \frac{x^3}{1! \cdot 3} + \frac{x^5}{2! \cdot 5} - \frac{x^7}{3! \cdot 7} + \dots \right) = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{n! (2n+1)}. \end{aligned}$$

С помощью тождества

$$\frac{2(-1)^n}{\sqrt{\pi} n! (2n+1)} = \frac{1}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - n\right)} \frac{2^{2n+1}}{(2n+1)!} = \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{r}{2}\right)} \frac{2^r}{r!},$$

где $n = 0, 1, 2, \dots$ и соответственно $r = 1, 3, 5, \dots$, можем также написать:

$$\Phi(x) = \sum_{r=1, 3, 5, \dots} \frac{(2x)^r}{r!} \frac{1}{\Gamma\left(1 - \frac{r}{2}\right)},$$

и сравнение с (38) даёт:

$$\begin{aligned} e^{-a\sqrt{p}} &\rightarrow 1 - \Phi\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \vartheta\left(\frac{a}{2\sqrt{t}}\right) = \\ &= 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{a}{2\sqrt{t}}} e^{-u^2} du. \end{aligned} \quad (6.40)$$

Дифференцированием по параметру a получим отсюда:

$$\sqrt{p} e^{-a\sqrt{p}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{a^2}{4t}}. \quad (6.41)$$

Можно переписать это соотношение в форме лапласова интеграла (1):

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-a\sqrt{p}} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(pt + \frac{a^2}{4t})} \frac{dt}{\sqrt{t}}. \quad (6.42)$$

Делая здесь $t = x^2$, получаем известный интеграл:

$$\frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^\infty e^{-(px^2 + \frac{a^2}{4x^2})} dx = \frac{e^{-a\sqrt{p}}}{p},$$

также принадлежащий Лапласу.

6°. Соотношение (41) или, что то же самое, (42) было выведено в предположении, что a положительно. Но поскольку его правая и левая части являются аналитическими

функциями a , это соотношение останется справедливым при любом a .

Примем, например, $a = 1 - i$. По (41) получим:

$$\sqrt{p} e^{-\sqrt{p}(1-i)} \div \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{\frac{i}{2t}}$$

и, следовательно,

$$\sqrt{p} e^{-\sqrt{p}} \cos \sqrt{p} \div \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \cos \frac{1}{2t}, \quad (6.43)$$

$$\sqrt{p} e^{-\sqrt{p}} \sin \sqrt{p} \div \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sin \frac{1}{2t}. \quad (6.44)$$

Аналогично получаем из (40):

$$e^{-\sqrt{p}} \cos \sqrt{p} \div 1 - C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right), \quad (6.45)$$

$$e^{-\sqrt{p}} \sin \sqrt{p} \div C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi t}}\right), \quad (6.46)$$

где

$$C(x) = \int_0^x \cos \frac{\pi u^2}{2} du, \quad S(x) = \int_0^x \sin \frac{\pi u^2}{2} du$$

известные интегралы Френеля.

§ 31. Асимптотическое представление начальной функции

1°. По определению ряд

$$a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots + \frac{a_n}{x^n} \dots,$$

вообще говоря, расходящийся, даёт асимптотическое представление функции $\varphi(x)$, если при любом n

$$\lim_{x \rightarrow \infty} x^n \left[\varphi(x) - a_0 - \frac{a_1}{x} - \dots - \frac{a_n}{x^n} \right] = 0.$$

Это записывается так:

$$\varphi(x) \sim a_0 + \frac{a_1}{x} + \frac{a_2}{x^2} + \dots$$

Асимптотические представления дают весьма удобное средство вычисления значений функции при больших значениях аргумента. Важным вопросом операционного исчисления является поэтому построение асимптотического представления начальной функции по её изображению.

Ограничимся рассмотрением случая изображения $F(p)$, удовлетворяющего требованиям леммы Жордана в левой полуплоскости (7° § 29). Начальную функцию при этом можно определить по формуле (17):

$$f(t) = \sum_{s=1}^n f_s(t), \quad f_s(t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s} e^{pt} F(p) \frac{dp}{p}. \quad (6.47)$$

Пусть разложение функции $\frac{F(p)}{p}$ в области особой точки $p = p_s$ имеет вид:

$$\frac{F(p)}{p} = \sum_{k=-m}^{\infty} A_k^{(s)} (p - p_s)^{\frac{k}{r}}. \quad (6.48)$$

При $r = 1$ особая точка является полюсом, при $m = 0$ — точкой разветвления; в общем случае имеем точку разветвления, являющуюся одновременно полюсом. Ряд (48) сходится в круге радиуса ρ_s^0 , не содержащем других особенностей, кроме $p = p_s$. Имеем:

$$f_s(t) = \frac{1}{2\pi i} \left[\int_{\gamma_s} e^{pt} \frac{F(p)}{p} + dp \int_{\Gamma_s^{(1)}} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp + \right. \\ \left. + \int_{\Gamma_s^{(2)}} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp \right], \quad (6.49)$$

где через $\Gamma_s^{(1)}$ и $\Gamma_s^{(2)}$ обозначены пути, идущие соответственно по верхнему и нижнему краям разреза (рис. 61); γ_s — окружность малого радиуса $\rho_s < \rho_s^0$ с центром в особой точке.

Вдоль разреза

$$p = p_s + \lambda e^{i\theta_s}, \quad dp = e^{i\theta_s} d\lambda,$$

где λ — вещественный параметр, изменяющийся в пределах p_s, ∞ ; θ_s — угол наклона разреза к вещественной оси; будем считать, что разрезы проведены, как указано на рис. 61, т. е. θ_s — тупой угол ($\cos \theta_s < 0$).

Оценим значение интегралов вдоль $\Gamma_s^{(1)}$ и $\Gamma_s^{(2)}$. Имеем

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_s^{(1)}} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp &= \\ &= \frac{e^{p_s t}}{2\pi i} \int_{p_s}^{\infty} \frac{F(p_s + \lambda e^{i\theta_s})}{p_s + \lambda e^{i\theta_s}} e^{\lambda (\cos \theta_s + i \sin \theta_s)} d\lambda = e^{p_s t} A_s^{(1)}. \end{aligned}$$

Пусть $\Gamma_s^{(1)}$ не проходит через особые точки функции $\frac{F(p)}{p}$. Кроме того, эта функция удовлетворяет условиям леммы Жордана, т. е. при $\lambda \rightarrow \infty$ стремится к нулю. Можно поэтому определить такую постоянную K_s , что при любых λ :

$$\left| \frac{F(p_s + \lambda e^{i\theta_s})}{p_s + \lambda e^{i\theta_s}} \right| < 2\pi K_s.$$

Оценивая теперь по модулю интеграл $A_s^{(1)}$, получим:

$$|A_s^{(1)}| < K_s \int_{p_s}^{\infty} e^{\lambda t \cos \theta_s} d\lambda = -\frac{K_s}{t \cos \theta_s} e^{t p_s \cos \theta_s},$$

так как $t \cos \theta_s < 0$; отсюда следует, что при любом n :

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^n A_s^{(1)} = 0, \quad (6.50)$$

т. е. $A_s^{(1)}$ убывает быстрее любой отрицательной степени t . Конечно, аналогичное предложение доказывается для интеграла по нижнему краю разреза.

Переходим к вычислению интеграла вдоль круга γ_s . Полагая $p = p_s + q$ и заменяем функцию $\frac{F(p)}{p}$ её разложением (48).

Получаем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{pt} \frac{F(p)}{p} dp = & \frac{e^{ps} t}{2\pi i} \left[\sum_{k=1}^m A_{-k}^{(s)} \int_{\gamma} e^{qt} q^{-\frac{k}{r}} dq + \right. \\ & + A_0^{(s)} \int_{\gamma} e^{qt} dq + \sum_{k=1}^{N-1} A_k^{(s)} \int_{\gamma} e^{qt} q^{\frac{k}{r}} dq + \\ & \left. + \int_{\gamma} R_N(q) e^{qt} dq \right], \quad (6.51) \end{aligned}$$

где через $R_N(q)$ обозначен остаток ряда и γ — окружность в плоскости q с центром в начале координат. В интегралах

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{qt} q^{\pm \frac{k}{r}} dq \quad (6.52)$$

единственной особенностью является начало координат $q = 0$. Поэтому путь интегрирования γ может быть заменен кругом C радиуса $R \rightarrow \infty$; но между последним и контуром, названным выше C_0 (рис. 61), также не имеется особенностей, и из сказанного следует, что интегралы (52) можно вычислить по формуле (26). Получаем:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{qt} q^{-\frac{k}{r}} dq = \frac{t^{\frac{k}{r}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{r}\right)}, \quad (k=1, 2, \dots, m) \quad (6.53)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{qt} q^{\frac{k}{r}} dq = \frac{1}{\Gamma\left(-\frac{k}{r}\right) t^{\frac{k}{r}+1}}, \quad (k=0, 1, 2, \dots, N-1) \quad (6.54)$$

причём для $\frac{k}{r}$, равного целому числу или нулю, последние интегралы будут равны нулю.

Нужно ещё произвести оценку интеграла

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_N(q) e^{qt} dq,$$

но мы не будем останавливаться на этом, а ограничимся указанием, что можно доказать неравенство:

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} R_N(q) e^{qt} dq \right| < \frac{\text{const}}{t^{\frac{N}{r}+1}}. \quad (6.55)$$

2°. Соединяя полученные результаты, имеем:

$$f_s(t) = e^{p_s t} \left[\sum_{k=1}^m A_{-k}^{(s)} \frac{t^{\frac{k}{r}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{r}\right)} + \sum_{k=1}^{N-1} \frac{A_k^{(s)}}{\Gamma\left(-\frac{k}{r}\right) t^{\frac{k}{r}+1}} + O\left(\frac{1}{t^{\frac{N}{r}+1}}\right) \right], \quad (6.56)$$

где последний член обозначает совокупность таких слагаемых, что

$$\lim_{t \rightarrow \infty} t^{\frac{N}{r}} O\left(\frac{1}{t^{\frac{N}{r}+1}}\right) = 0. \quad (6.57)$$

Поэтому, исходя из приведённого в начале этого параграфа определения асимптотического разложения, можно написать:

$$e^{-p_s t} f_s(t) \sim \sum_{k=1}^m \frac{A_{-k}^{(s)} t^{\frac{k}{r}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{r}\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^{(s)}}{\Gamma\left(-\frac{k}{r}\right) t^{\frac{k}{r}+1}}. \quad (6.58)$$

Мы будем обозначать правую часть этой формулы через $H_{p_s}(t)$ и называть разложением в особой точке p_s . Назовём через $p_1^*, p_2^*, \dots, p_l^*$ особые точки, имеющие наибольшую вещественную часть (может быть несколько особых точек с одинаковыми вещественными частями). Ясно, что в асимптотическом представлении начальной функции нужно учесть разложения только в области этих особых точек. Получаем по (47):

$$f(t) \sim \sum_{s=1}^l e^{p_s^* t} H_{p_s^*}(t).$$

Резюмируем полученный результат: пусть изображение $F(p)$ удовлетворяет следующим требованиям: 1) $F(p)$ имеет только алгебраические особенности (полюсы и точки разветвления), 2) при $\operatorname{Re} p < 0$ функция $\frac{F(p)}{p}$ равномерно относительно аргумента φ стремится к нулю, когда $|p| \rightarrow \infty$, 3) в области особых точек $p = p_s^*$ ($s = 1, 2, \dots, l$) с наибольшей вещественной частью $\frac{F(p)}{p}$ представляется рядом вида:

$$\sum_{k=1}^m A_{-k}^{(s)} (p - p_s^*)^{-\frac{k}{r}} + \sum_{k=0}^{\infty} A_k^{(s)} (p - p_s^*)^{\frac{k}{r}}.$$

При этих условиях асимптотическое представление начальной функции $f(t) \leftarrow F(p)$ будет:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{s=1}^l e^{p_s^* t} H_{p_s^*}^*(t) = \\ &= \sum_{s=1}^l e^{p_s^* t} \left[\sum_{k=1}^m \frac{A_{-k}^{(s)} t^{\frac{k}{r}-1}}{\Gamma\left(\frac{k}{r}\right)} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{A_k^{(s)}}{\Gamma\left(-\frac{k}{r}\right) t^{\frac{k}{r}+1}} \right]. \quad (6.59) \end{aligned}$$

3°. Пусть, в частности, все особые точки, кроме начала координат, имеют отрицательную вещественную часть, а начало координат является точкой разветвления, для которой $r = 2$ ($m = 0$). Нас должно интересовать разложение только в области $p = 0$; предположим, что оно имеет вид:

$$F(p) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n p^{\frac{n}{2}}, \quad \text{т. е.} \quad \frac{F(p)}{p} = \sum_{n=1}^{\infty} B_n p^{\frac{n}{2}-1}.$$

Асимптотическое разложение $f(t)$ по (59) будет:

$$\begin{aligned} f(t) &\sim \sum_{n=1}^{\infty} \frac{B_n}{\Gamma\left(1 - \frac{n}{2}\right) t^{\frac{n}{2}}} = \\ &= \sum_{m=1}^{\infty} \frac{B_{2m}}{\Gamma(1-m) t^m} + \sum_{m=0}^{\infty} \frac{B_{2m+1}}{\Gamma\left(\frac{1}{2} - m\right) t^m \sqrt{t}}. \end{aligned}$$

Вследствие наличия множителя

$$\frac{1}{\Gamma(1-m)} = 0 \quad (m = 1, 2, \dots)$$

слагаемые с четными индексами пропадают. Заменяя $\frac{1}{\Gamma(\frac{1}{2}-m)}$

его значением, получаем:

$$f(t) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \sum_{m=0}^{\infty} (-1)^m B_{2m+1} \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \dots (2m-1)}{(2t)^m}. \quad (6.60)$$

4°. Рассмотрим второй частный случай, когда $p = b$ — полюс m -го порядка ($r = 1$) функции $\frac{F(p)}{p}$, а другие особенности имеют меньшую чем $\operatorname{Re} b$ вещественную часть. Разложение $H_b(t)$, относящееся к этому полюсу, будет по (58):

$$H_b(t) = \sum_{k=1}^m \frac{A_{-k}}{\Gamma(k)} t^{k-1},$$

так как прочие слагаемые содержат коэффициенты $\frac{1}{\Gamma(-k)}$ и должны быть отброшены. Получаем:

$$f(t) \sim e^{bt} \sum_{k=1}^m \frac{A_{-k}}{(k-1)!} t^{k-1} \quad (6.61)$$

и, в частности, для полюса первого порядка функции $\frac{F(p)}{p}$:

$$f(t) \sim e^{bt} A_{-1}, \quad H_b = A_{-1}, \quad (6.62)$$

т. е. разложение в области полюса первого порядка равно вычету функции $\frac{F(p)}{p}$ в этом полюсе.

5°. Рассмотрим в качестве примера изображение:

$$F(p) = \frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{p}}} = \frac{p - \sqrt{\pi p}}{p - \pi}.$$

По теореме свёртывания и (28) имеем:

$$\frac{\sqrt{\pi p}}{p - \pi} \rightarrow \int_0^t e^{\pi(t-\tau)} \frac{d\tau}{\sqrt{\tau}}$$

и по (39) получим:

$$\frac{1}{1 + \sqrt{\frac{\pi}{p}}} \rightarrow e^{\pi t} \left(1 - \int_0^t \frac{e^{-\pi\tau}}{\sqrt{\tau}} d\tau \right) = e^{\pi t} [1 - \Phi(\sqrt{\pi t})], \quad (6.63)$$

где $\Phi(x)$ — интеграл вероятности.

Найдём теперь асимптотическое представление начальной функции. Если рассматривать ту ветвь квадратного корня, которая положительна при вещественном положительном p , то единственной особенностью $F(p)$ является точка разветвления в начале координат. Разложение (48) в области этой особенности будет:

$$F(p) = \frac{\sqrt{\frac{p}{\pi}}}{\sqrt{\frac{p}{\pi}} + 1} = \sqrt{\frac{p}{\pi}} - \frac{p}{\pi} + \left(\frac{p}{\pi}\right)^{3/2} - \dots \quad (6.64)$$

причём этот ряд сходится при $|p| < \pi$.

В (60) имеем $B_{2m+1} = \frac{1}{\pi^m \sqrt{\pi}}$ и, следовательно,

$$\begin{aligned} e^{\pi t} [1 - \Phi(\sqrt{\pi t})] &= e^{\pi t} \mathfrak{D}(\sqrt{\pi t}) \sim \\ &\sim \frac{1}{\pi \sqrt{t}} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m 1 \cdot 3 \dots (2m-1)}{(2\pi t)^m}. \end{aligned} \quad (6.65)$$

Заметим, что формально этот результат можно было бы получить, пользуясь правилом Хевисайда (37), но надо иметь в виду, что это правило выводилось в предположении сходимости ряда (36) во всей плоскости; в рассматриваемом случае ряд (64) расходится при $|p| > \pi$, а разложение (65) расходится при всех t ; им можно, однако, пользоваться как всяким асимптотическим представлением для вычисления при больших значениях t .

Обозначая $\pi t = x^2$, находим теперь известное асимптотическое представление интеграла вероятности

$$1 - \Phi(x) = \vartheta(x) \sim \frac{e^{-x^2}}{\sqrt{\pi x}} \left(1 - \frac{1}{2x^2} + \frac{1 \cdot 3}{(2x^2)^2} - \dots \right). \quad (6.66)$$

Как второй пример рассмотрим функцию

$$F(p) = \frac{\omega p \sqrt{p}}{\omega^2 + p^2}.$$

По теореме свёртывания и (28) имеем:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{1}{p} \frac{\omega p^2}{\omega^2 + p^2} \sqrt{p} \rightarrow \frac{\omega}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\cos \omega(t-\tau)}{\sqrt{\tau}} d\tau = \\ &= \sqrt{2\omega} \left[\cos \omega t C\left(\sqrt{\frac{2\omega t}{\pi}}\right) + \sin \omega t S\left(\sqrt{\frac{2\omega t}{\pi}}\right) \right], \quad (6.67) \end{aligned}$$

где введены в рассмотрение интегралы Френеля (6° § 30).

Найдём асимптотическое представление $f(t)$. Вычеты $\frac{F(p)}{p}$

в полюсах $\pm \omega i$ суть $\frac{\sqrt{\omega i}}{2i}$, $-\frac{\sqrt{-\omega i}}{2i}$ и асимптотическое представление в области этих полюсов по (62) будет:

$$\begin{aligned} e^{i\omega t} H_{i\omega}(t) + e^{-i\omega t} H_{-i\omega}(t) &= e^{i\omega t} \frac{\sqrt{\omega i}}{2i} - e^{-i\omega t} \frac{\sqrt{-\omega i}}{2i} = \\ &= \sqrt{\omega} \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned}$$

В начале координат имеем далее:

$$F(p) = \frac{\omega p \sqrt{p}}{\omega^2 + p^2} = \frac{1}{\omega} p \sqrt{p} \left(1 - \frac{p^2}{\omega^2} + \frac{p^4}{\omega^4} - \dots \right)$$

и по (60) имеем $B_1 = B_5 = \dots = 0$, $B_3 = \frac{1}{\omega}$, $B_7 = -\frac{1}{\omega^3}$ и т. д.

Получаем:

$$H_0(t) = -\frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left[\frac{1}{2\omega t} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\omega t)^3} + \frac{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9}{(2\omega t)^5} - \dots \right].$$

Складывая эти выражения, находим:

$$f(t) = \sqrt{2\omega} \left[C \left(\sqrt{\frac{2\omega t}{\pi}} \right) \cos \omega t + S \left(\sqrt{\frac{2\omega t}{\pi}} \right) \sin \omega t \right] \sim \\ \sim \sqrt{\omega} \cos \left(\omega t - \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \left(\frac{1}{2\omega t} - \frac{1 \cdot 3 \cdot 5}{(2\omega t)^3} + \dots \right). \quad (6.68)$$

6°. Найдём в заключение асимптотическое представление функции Бесселя; по (1.59) имеем:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} \rightarrow J_0(t).$$

Функция

$$\frac{F(p)}{p} = \frac{1}{\sqrt{p^2 + 1}}$$

имеет точки разветвления $p = \pm i$. В области полюса $p = i$ имеем разложение в ряд (48):

$$\frac{1}{\sqrt{1 + p^2}} = \frac{1}{\sqrt{2i} \sqrt{1 + \frac{p-i}{2i}}} \frac{1}{\sqrt{p-i}} = \\ = \frac{(p-i)^{-\frac{1}{2}}}{\sqrt{2i}} \left[1 - \frac{1}{2} \frac{p-i}{2i} + \frac{1 \cdot 3}{2 \cdot 4} \left(\frac{p-i}{2i} \right)^2 - \dots \right].$$

Здесь $r=2$, $m=1$. Разложение начальной функции в области полюса $p=i$ по (58) будет:

$$H_i(t) = \frac{1}{\sqrt{2\pi i t}} \left(1 + \frac{1}{8it} - \frac{1^2 \cdot 3^2}{2!} \frac{1}{(8t)^2} - \frac{1^2 \cdot 3^2 \cdot 5^2}{3! t} \frac{1}{(8t)^3} + \dots \right)$$

и аналогично выражается $H_{-i}(t)$. По (59) получим:

$$J_0(t) \sim H_i(t) e^{it} + H_{-i}(t) e^{-it} = 2 \operatorname{Re} [e^{it} H_i(t)], \quad (6.69)$$

и вычисление даёт:

$$J_0(t) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi t}} \left[\cos \left(t - \frac{\pi}{4} \right) P_0(t) - \sin \left(t - \frac{\pi}{4} \right) Q_0(t) \right], \quad (6.70)$$

$$P_0(t) = 1 - \frac{9}{128t^2} + \dots; \quad Q_0(t) = \frac{1}{8t} - \frac{75}{1024t^3} + \dots$$

§ 32. Изображения некоторых функций

1°. Выше была получена формула (41):

$$\sqrt{p} e^{-\tau \sqrt{p}} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} e^{-\frac{\tau^2}{4t}}$$

или, что то же самое:

$$\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\tau \sqrt{p}} = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t} - pt} \frac{dt}{\sqrt{\pi t}}. \quad (6.71)$$

Пусть $f(t) \leftrightarrow F(p)$. Воспользовавшись (71), нетрудно найти начальную функцию для изображения $F(\sqrt{p})$. По определению имеем:

$$\frac{F(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-pt} f(\tau) d\tau, \text{ т. е. } \frac{F(\sqrt{p})}{p} = \frac{1}{\sqrt{p}} \int_0^{\infty} e^{-\tau \sqrt{p}} f(\tau) d\tau.$$

Заменяя под знаком интеграла $\frac{1}{\sqrt{p}} e^{-\tau \sqrt{p}}$ его значением (71) и предполагая законность перемены порядка интегрирования, что нужно проверить в каждом случае особо, получим:

$$\begin{aligned} \frac{F(\sqrt{p})}{p} &= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t} - pt} \frac{dt}{\sqrt{\pi t}} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\infty} e^{-pt} \frac{dt}{\sqrt{t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$F(\sqrt{p}) \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} f(\tau) d\tau. \quad (6.72)$$

Пусть, например,

$$F(p) = \frac{p}{p+a} \rightarrow e^{-at}.$$

Получаем:

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + \alpha} \rightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t} - \alpha \tau} d\tau.$$

Этот интеграл подстановкой

$$\frac{\tau}{2\sqrt{t}} + \alpha\sqrt{t} = u$$

приводится к интегралу вероятности. Получаем:

$$\frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} + \alpha} \rightarrow e^{\alpha^2 t} [1 - \Phi(\alpha\sqrt{t})] = e^{\alpha^2 t} \mathfrak{F}(\alpha\sqrt{t}),$$

что согласуется с (63).

Другой интересный пример дают изображения

$$F_1(\sqrt{p}) = \frac{\sqrt{p}}{\operatorname{sh} \sqrt{p}}, \quad F_2(p) = \sqrt{p} \operatorname{cth} \sqrt{p}.$$

В этом случае

$$\begin{aligned} F_1(p) &= \frac{p}{\operatorname{sh} p} = 2p \frac{e^{-p}}{1 - e^{-2p}} = \\ &= 2p (e^{-p} + e^{-3p} + e^{-5p} + \dots) \rightarrow \\ &\rightarrow 2 [\sigma_1(t-1) + \sigma_1(t-3) + \sigma_1(t-5) + \dots]; \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} F_2(p) &= \frac{p \operatorname{ch} p}{\operatorname{sh} p} = \frac{p(1 + e^{-2p})}{1 - e^{-2p}} \rightarrow \\ &\rightarrow \sigma_1(t) + 2\sigma_1(t-2) + 2\sigma_1(t-4) + \dots, \end{aligned}$$

где $\sigma_1(t)$ — единичная импульсивная функция; по (72) получаем:

$$\begin{aligned} \frac{\sqrt{p}}{\operatorname{sh} \sqrt{p}} &\rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} [\sigma_1(\tau-1) + \sigma_1(\tau-3) + \\ &+ \sigma_1(\tau-5) + \dots] d\tau = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi t}} (e^{-\frac{1}{4t}} + e^{-\frac{9}{4t}} + e^{-\frac{25}{4t}} + \dots); \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \sqrt{p} \operatorname{cth} \sqrt{p} &\divrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau^2}{4t}} [\sigma_1(\tau) + 2\sigma_1(\tau-2) + \\ &+ 2\sigma_1(\tau-4) + \dots] d\tau = \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi t}} (1 + 2e^{-\frac{1}{t}} + 2e^{-\frac{4}{t}} + 2e^{-\frac{9}{t}} + \dots). \end{aligned}$$

Мы воспользовались здесь соотношением

$$\int_0^{\infty} \psi(\tau) \sigma_1(t-\tau) d\tau = \psi(t),$$

непосредственно получающимся из определения импульсивной функции (§ 6).

Если ввести в рассмотрение известные из теории эллиптических функций тета-функции:

$$\begin{aligned} \vartheta_2(v|q) &= 2q^{\frac{1}{4}} \cos v\pi + 2q^{\frac{9}{4}} \cos 3v\pi + 2q^{\frac{25}{4}} \cos 5v\pi + \dots, \\ \vartheta_3(v|q) &= 1 + 2q \cos v\pi + 2q^4 \cos 4v\pi + 2q^9 \cos 6v\pi + \dots, \end{aligned}$$

то приведённые выше результаты представятся в виде:

$$\frac{\sqrt{p}}{\operatorname{sh} \sqrt{p}} \divrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \vartheta_2(0|e^{-\frac{1}{4t}}), \quad \sqrt{p} \operatorname{cth} \sqrt{p} \divrightarrow \frac{1}{\sqrt{\pi t}} \vartheta_3(0|e^{-\frac{1}{4t}}).$$

2°. Аналогичный результат можно получить, применив изображение (1.60):

$$e^{-\frac{\tau}{p}} \divrightarrow J_0(2\sqrt{t\tau}), \quad \frac{1}{p} e^{-\frac{\tau}{p}} = \int_0^{\infty} e^{-p t} J_0(2\sqrt{t\tau}) dt. \quad (6.73)$$

Снова полагая $F(p) \divrightarrow f(t)$, найдём начальную функцию для изображения $F\left(\frac{1}{p}\right)$. Имеем:

$$\frac{F(p)}{p} = \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau, \quad pF\left(\frac{1}{p}\right) = \int_0^{\infty} e^{-\frac{\tau}{p}} f(\tau) d\tau$$

и, следовательно,

$$\begin{aligned} F\left(\frac{1}{p}\right) &= \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-pt} J_0(2\sqrt{t\tau}) dt = \\ &= \int_0^{\infty} e^{-pt} dt \int_0^{\infty} J_0(2\sqrt{t\tau}) f(\tau) d\tau, \end{aligned}$$

предполагая законность перемены порядка интегрирования.

Получаем:

$$pF\left(\frac{1}{p}\right) \div \int_0^{\infty} f(\tau) J_0(2\sqrt{t\tau}) d\tau. \quad (6.74)$$

Искомую начальную функцию для изображения $F\left(\frac{1}{p}\right)$ теперь получим, интегрируя правую часть (74) по t в пределах $(0, t)$; имеем:

$$\int_0^t J_0(2\sqrt{t\tau}) dt = \frac{1}{2\tau} \int_0^{2\sqrt{t\tau}} J_0(x) x dx = \sqrt{\frac{t}{\tau}} J_1(2\sqrt{t\tau})$$

и, следовательно,

$$F\left(\frac{1}{p}\right) \div \int_0^{\infty} f(\tau) \sqrt{\frac{t}{\tau}} J_1(2\sqrt{t\tau}) d\tau. \quad (6.75)$$

Можно доказать более общее соотношение:

$$\frac{1}{p^{n-1}} F\left(\frac{1}{p}\right) \div \int_0^{\infty} f(\tau) \left(\frac{t}{\tau}\right)^{\frac{n}{2}} J_n(2\sqrt{t\tau}) d\tau. \quad (6.76)$$

3°. Результаты, полученные в пп. 1° и 2°, представляют частные примеры общего преобразования, данного А. М. Эфросом.¹

¹ А. М. Эфрос, О некоторых применениях операционного исчисления к анализу. Математ. сб., т. 42, № 6, 1936. См. также А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы. ДНТУ, 1937, стр. 126.

Предполагая известной начальную функцию для изображения $U(p) \zeta(p) e^{-\tau \zeta(p)}$:

$$U(p) \zeta(p) e^{-\tau \zeta(p)} \dashrightarrow \psi(t, \tau), \quad (6.77)$$

имеем

$$U(p) F[\zeta(p)] \dashrightarrow \int_0^{\infty} \psi(t, \tau) f(\tau) d\tau, \quad (6.78)$$

где $F(p) \dashrightarrow f(t)$.

Чтобы убедиться в этом, заменим в соотношении

$$F(p) = p \int_0^{\infty} e^{-p\tau} f(\tau) d\tau$$

букву p на $\zeta(p)$; получим:

$$F[\zeta(p)] = \zeta(p) \int_0^{\infty} e^{-\tau \zeta(p)} f(\tau) d\tau.$$

Но по (77):

$$U(p) \zeta(p) e^{-\tau \zeta(p)} = p \int_0^{\infty} \psi(t, \tau) e^{-p t} dt$$

и, следовательно,

$$U(p) F[\zeta(p)] = p \int_0^{\infty} f(\tau) d\tau \int_0^{\infty} e^{-p t} \psi(t, \tau) dt$$

или, меняя порядок интегрирования,

$$U(p) F[\zeta(p)] = p \int_0^{\infty} e^{-p t} dt \int_0^{\infty} \psi(t, \tau) f(\tau) d\tau,$$

откуда и следует (78).

Например, в п. 1° мы имели $\zeta(p) = \sqrt{p}$, $U(p) = 1$, в п. 2°, как видно по (73), $\zeta(p) = \frac{1}{p}$, $U(p) = p$.

В качестве ещё одного примера возьмём

$$\zeta(p) = p + \frac{1}{p}, \quad U(p) = \frac{1}{\zeta(p)} = \frac{1}{p + \frac{1}{p}}.$$

Имеем:

$$U(p) \zeta(p) e^{-(p+\frac{1}{p})\tau} = e^{-p\tau} e^{-\frac{\tau}{p}}.$$

По теореме запаздывания и (73) имеем:

$$e^{-p\tau} e^{-\frac{\tau}{p}} \dot{\div} \begin{cases} 0 & t < \tau \\ J_0[2\sqrt{(t-\tau)\tau}] & t > \tau, \end{cases}$$

и из (78) следует соотношение:

$$\frac{F\left(p + \frac{1}{p}\right)}{p + \frac{1}{p}} \dot{\div} \int_0^t J_0[2\sqrt{(t-\tau)\tau}] f(\tau) d\tau. \quad (6.79)$$

4°. В первой главе была приведена формула (1.59), дающая изображение бесселевой функции нулевого порядка $J_0(t)$:

$$J_0(t) \dot{\div} \frac{p}{\sqrt{p^2+1}}. \quad (6.80)$$

Изображение функции Бесселя первого порядка $J_1(t)$ получим, пользуясь тем, что

$$J'_0(t) = -J_1(t), \quad J_0(0) = 1$$

и, следовательно,

$$J_1(t) \dot{\div} -p \left(\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} - 1 \right) = \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} (\sqrt{p^2+1} - p). \quad (6.81)$$

Переходя теперь к построению изображения бесселевой функции любого целого порядка n , воспользуемся рекуррентным соотношением ($n=0, 1, 2, \dots$):

$$\frac{dJ_{n+1}(t)}{dt} = \frac{1}{2} J_n(t) - \frac{1}{2} J_{n+2}(t). \quad (6.82)$$

Полагая

$$J_n(t) \dot{\div} Q_n(p)$$

и замечая, что $J_n(0) = 0$ для $n=1, 2, 3, \dots$, представим (82) в форме:

$$Q_{n+2}(p) + 2pQ_{n+1}(p) - Q_n(p) = 0 \quad (6.83)$$

и задача будет состоять в решении этого разностного уравнения при начальных условиях (80) и (81):

$$Q_0(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}}, \quad Q_1(p) = \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} (\sqrt{p^2 + 1} - p).$$

От уравнения (83) перейдём к его изображающему уравнению по целочисленному аргументу n , полагая

$$Q_n(p) \leftarrow \div^* Z(r),$$

где $Z(r)$, конечно, параметрически зависит от p . По правилам § 14 получаем:

$$Z(r) (e^{2r} + 2pe^r - 1) = (e^r - 1) [Q_0(p) (e^r + 2p) + Q_1(p)].$$

Полагая

$$e^\lambda = p + \sqrt{p^2 + 1}, \quad e^{-\lambda} = -p + \sqrt{p^2 + 1}, \quad (6.84)$$

получим:

$$\begin{aligned} Z(r) &= \frac{(e^r - 1) [2Q_0(p) \operatorname{sh} \lambda + Q_1(p) + e^r Q_0(p)]}{e^{2r} + (e^\lambda - e^{-\lambda}) e^r - 1} = \\ &= \frac{1}{2 \operatorname{ch} \lambda} \left\{ [Q_0(p) e^\lambda + Q_1(p)] \frac{e^r - 1}{e^r - e^{-\lambda}} + \right. \\ &\quad \left. + [Q_0(p) e^{-\lambda} - Q_1(p)] \frac{e^r - 1}{e^r + e^\lambda} \right\}. \end{aligned}$$

Подставляя значения $Q_0(p)$ и $Q_1(p)$ и пользуясь (84), найдём далее:

$$Q_0(p) e^{-\lambda} - Q_1(p) = 0, \quad Q_0(p) e^\lambda + Q_1(p) = 2p = 2 \operatorname{sh} \lambda$$

и, значит,

$$\begin{aligned} Z(r) &= \frac{\operatorname{sh} \lambda}{\operatorname{ch} \lambda} \frac{e^r - 1}{e^r - e^{-\lambda}} \rightarrow e^{-n\lambda} \operatorname{th} \lambda = \\ &= (\sqrt{p^2 + 1} - p)^n \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} = Q_n(p). \end{aligned}$$

Итак,

$$J_n(t) \leftarrow \div \frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} [\sqrt{p^2 + 1} - p]^n \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (6.85)$$

Изображением (85) можно воспользоваться для суммирования некоторых рядов по бесселевым функциям. Ограничимся простейшим примером:

$$\begin{aligned} J_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) &\leftarrow \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \{1 + 2[\sqrt{p^2+1} - p]^2 + \\ &+ 2[\sqrt{p^2+1} - p]^4 + \dots\} = \\ &= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \frac{1 + [\sqrt{p^2+1} - p]^2}{1 - [\sqrt{p^2+1} - p]^2} = 1 \rightarrow 1, \end{aligned}$$

т. е. ¹

$$J_0(t) + 2 \sum_{n=1}^{\infty} J_{2n}(t) = 1.$$

5°. Имея в виду некоторые дальнейшие приложения, рассмотрим далее изображение:

$$\begin{aligned} F(p) &= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} e^{-\tau(\sqrt{1+p^2}-p)} = \\ &= \frac{p}{\sqrt{p^2+1}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} (\sqrt{1+p^2}-p)^n \end{aligned}$$

и по (85) получаем:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2+1}} e^{-\tau(\sqrt{1+p^2}-p)} \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{\tau^n}{n!} J_n(t). \quad (6.86)$$

Ряд в правой части можно представить в конечной форме. Воспользуемся для этого формулой дифференцирования бесселевых функций:

$$\frac{d}{dx} [x^{-\frac{n}{2}} J_n(\sqrt{x})] = -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} (n+1) J_{n+1}(\sqrt{x}).$$

¹ Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции. ОНТИ, 1935, стр. 120.

Из неё последовательно получаем:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dx} J_0(\sqrt{x}) &= -\frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} J_1(\sqrt{x}), \\ \frac{d^2}{dx^2} J_0(\sqrt{x}) &= -\frac{1}{2} \frac{d}{dx} [x^{-\frac{1}{2}} J_1(\sqrt{x})] = \frac{1}{2^2} x^{-\frac{2}{2}} J_2(\sqrt{x}), \\ \frac{d^3}{dx^3} J_0(\sqrt{x}) &= \frac{1}{2^3} \frac{d}{dx} [x^{-\frac{2}{2}} J_2(\sqrt{x})] = -\frac{1}{2^3} x^{-\frac{3}{2}} J_3(\sqrt{x})\end{aligned}$$

и т. д. Вообще:

$$\frac{d^n}{dx^n} J_0(\sqrt{x}) = \frac{(-1)^n}{2^n} x^{-\frac{n}{2}} J_n(\sqrt{x}).$$

Это соотношение позволяет представить ряд Тейлора для функции $J_0(\sqrt{x+h})$ в форме

$$J_0(\sqrt{x+h}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{h^n}{n!} \frac{d^n}{dx^n} [J_0(\sqrt{x})] = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n h^n}{n! (2\sqrt{x})^n} J_n(\sqrt{x}).$$

Полагая теперь $x = t^2$, $\frac{h}{2\sqrt{x}} = \tau$, получим:

$$J_0(\sqrt{t^2 + 2t\tau}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} J_n(t). \quad (6.87)$$

Соотношение (86) поэтому принимает вид:

$$\begin{aligned}\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} e^{-\tau(\sqrt{1+p^2} - p)} &\div \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \tau^n}{n!} J_n(t) = \\ &= J_0(\sqrt{(t + \tau)^2 - \tau^2}).\end{aligned} \quad (6.88)$$

Воспользовавшись теоремой запаздывания, можно также написать:

$$\frac{p}{\sqrt{p^2 + 1}} e^{-\tau\sqrt{1+p^2}} \div \begin{cases} 0 & t < \tau, \\ J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) & t > \tau. \end{cases} \quad (6.89)$$

6°. В преобразовании А. М. Эфроса (77) примем теперь

$$\zeta(p) = \sqrt{p^2 + 1}. \quad U(p) = \frac{p}{1 + p^2}.$$

По (78) и (89) получим:

$$\frac{p}{1 + p^2} F(\sqrt{p^2 + 1}) \rightarrow \int_0^t f(\tau) J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) d\tau, \quad (6.90)$$

или по (87):

$$\frac{p}{1 + p^2} F(\sqrt{p^2 + 1}) \rightarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!} \int_0^t f(\tau) \tau^n J_n(t - \tau) d\tau. \quad (6.91)$$

Г Л А В А VII

РАЗЛИЧНЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

§ 33. Приложение операционного исчисления к решению одного класса интегро-дифференциальных уравнений

1°. Метод операционного исчисления позволяет дать в простой форме решение интегрального уравнения с переменным верхним пределом

$$\varphi(t) = f(t) + \int_0^t k(t, \tau) \varphi(\tau) d\tau \quad (7.1)$$

в предположении, что ядро $k(t, \tau)$ является функцией разности аргументов t и τ :

$$k(t, \tau) = k(t - \tau). \quad (7.2)$$

Пусть

$$k(t) \leftarrowdiv K(p), \quad \varphi(t) \leftarrowdiv \Phi(p), \quad f(t) \leftarrowdiv F(p).$$

По теореме свёртывания

$$\int_0^t k(t - \tau) \varphi(\tau) d\tau \leftarrowdiv \frac{1}{p} K(p) \Phi(p),$$

вследствие чего изображающее уравнение для (1) будет

$$\Phi(p) = F(p) + \frac{1}{p} K(p) \Phi(p). \quad (7.3)$$

Отсюда находим изображение

$$\Phi(p) = \frac{pF(p)}{p - K(p)}. \quad (7.4)$$

Отсюда находится $\Phi(p)$, а вслед за этим соответствующая начальная функция.

3°. Классическим примером является обобщённая задача Абе́ля, заключающаяся в определении $\varphi(t)$ из функционального уравнения

$$f(t) = \int_0^t \frac{\varphi(\tau) d\tau}{(t-\tau)^\mu}, \quad (0 < \mu < 1)$$

где $f(t)$ — заданная функция.

В данном случае по (6.25)

$$k(t) = t^{-\mu} \div \Gamma(1-\mu) p^\mu,$$

и изображающее уравнение (3) даёт:

$$\Phi(p) = \frac{F(p)}{\Gamma(1-\mu) p^{\mu-1}}.$$

Но по (6.25)

$$\frac{1}{p^{\mu-1}} \div \frac{1}{\Gamma(\mu)} t^{\mu-1}$$

и по теореме свёртывания

$$\Phi(p) = p \cdot \frac{1}{p} \cdot \frac{F(p)}{\Gamma(1-\mu) p^{\mu-1}} \div \frac{1}{\Gamma(\mu) \Gamma(1-\mu)} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau) d\tau}{(t-\tau)^{1-\mu}}$$

или

$$\varphi(t) = \frac{\sin \mu\pi}{\pi} \frac{d}{dt} \int_0^t \frac{f(\tau)}{(t-\tau)^{1-\mu}} d\tau.$$

4°. Аппарат теории линейных интегральных уравнений вида (1) применяется для описания физических процессов, сопровождающихся последствием.

Известно, что при линейном напряжённом состоянии (например, при растяжении стержня) связь между напряжением σ и деформацией ε даётся в случае идеально-упругого тела законом Гука:

$$\sigma = E\varepsilon.$$

В теории „наследственной упругости“ учитывается, что напряжение $\sigma(t)$ в данный момент времени зависит от предшествующей истории деформирования; одной из форм записи

зависимости между напряжением и деформацией, заменяющей в такой среде закон Гука, может служить линейное интегральное соотношение вида (1):

$$\sigma(t) = E \left[\varepsilon(t) - \kappa \int_0^t k(t-\tau) \varepsilon(\tau) d\tau \right]. \quad (7.7)$$

Ядро релаксации $k(t-\tau)$ обычно принимают зависящим только от разности аргументов $t-\tau$; при этом условии напряжение $\sigma(t)$ не будет зависеть от изменения начала отсчёта времени.

Задача состоит в обращении соотношения (7), т. е. в том, чтобы выразить $\varepsilon(t)$ через $\sigma(t)$ в форме:

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{E} \left[\sigma(t) + \kappa \int_0^t \gamma(t-\tau) \sigma(\tau) d\tau \right], \quad (7.8)$$

где $\gamma(t-\tau)$ называют ядром последдействия. Дело сводится, таким образом, к разысканию функции $\gamma(t)$.

Рассмотрим частный случай ядра вида:¹

$$k(t) = \frac{t^\alpha}{\Gamma(\alpha+1)}, \quad (7.9)$$

причём $\alpha > -1$. Обозначим

$$S(p) \longleftrightarrow \sigma(t), \quad E(p) \longleftrightarrow \varepsilon(t).$$

По (6.25) имеем:

$$k(t) \longleftrightarrow \frac{1}{p^\alpha} = K(p),$$

и подстановка в (4) даёт:

$$E(p) = \frac{S(p)}{E} \frac{1}{1 - \frac{\kappa}{p^{\alpha+1}}} = \frac{S(p)}{E} \left(1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa^n}{p^{(\alpha+1)n}} \right). \quad (7.10)$$

Но по (6.25):

$$\frac{1}{p^{(\alpha+1)n-1}} \longleftrightarrow \frac{t^{(\alpha+1)n-1}}{\Gamma(n\alpha+n)},$$

¹ Ю. Н. Работнов, Равновесие упругой среды с последствием. Прикл. матем. и механ., XII, № 1, 1948, стр. 53.

откуда по теореме свёртывания получим решение требуемого вида (8) с ядром последействия:

$$\gamma(t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\kappa^{n-1} t^{(\alpha+1)n-1}}{\Gamma(\alpha n + n)}. \quad (7.11)$$

При $\alpha = -\frac{1}{2}$ решение, как показано в 4° § 31, выражается через интеграл вероятности. В (10) имеем:

$$\begin{aligned} E(p) &= \frac{S(p)}{E} \frac{1}{1 - \frac{\kappa}{\sqrt{p}}} = \frac{S(p)}{E} + \frac{\kappa S(p)}{E} \frac{1}{\sqrt{p} - \kappa} = \\ &= \frac{S(p)}{E} + \frac{\kappa S(p)}{pE} \Gamma(p), \end{aligned}$$

где $\Gamma(p)$ — изображение ядра последействия:

$$\gamma(t) \stackrel{\div}{\leftarrow} \Gamma(p) = \frac{p}{\sqrt{p} - \kappa} = \frac{p(\sqrt{p} + \kappa)}{p - \kappa^2}. \quad (7.12)$$

Нужно найти начальную функцию для изображения

$$\frac{p \sqrt{p}}{p - \kappa^2} = \sqrt{p} \left(1 + \frac{\kappa^2}{p - \kappa^2} \right) = \sqrt{p} + \frac{1}{p} \sqrt{p} \frac{\kappa^2 p}{p - \kappa^2}.$$

По теореме свёртывания и (6.28) получаем:

$$\frac{p \sqrt{p}}{p - \kappa^2} \stackrel{\div}{\rightarrow} \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \frac{\kappa^2}{\sqrt{\pi}} e^{\kappa^2 t} \int_0^t \frac{e^{-\kappa^2 \xi}}{\sqrt{\xi}} d\xi = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \kappa e^{\kappa^2 t} \Phi(\kappa \sqrt{t}),$$

где $\Phi(x)$ даётся формулой (6.39).

По (12) находим выражение, полученное Ю. Н. Работновым в указанной выше работе:

$$\gamma(t) = \frac{1}{\sqrt{\pi t}} + \kappa e^{\kappa^2 t} [1 + \Phi(\kappa \sqrt{t})]. \quad (7.13)$$

5°. Известно, что при весьма медленном движении (точнее: весьма малых числах Рейнольдса) сопротивление вязкой жидкости прямолинейному движению в ней шара даётся формулой Стокса:

$$\mathbf{k} = -6\pi\mu a \mathbf{v},$$

Эта формула выводится в предположении, что движение жидкости установившееся. При неустановившемся движении она заменяется формулой Буссинеска:¹

$$k = -\frac{2}{3} \pi \rho a^3 w(t) - 6\pi \mu a \left[v(t) + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{v(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - 2a^2 \sqrt{\frac{\mu \pi \rho}{t}} v(0) \right]. \quad (7.14)$$

Здесь $v(t)$ и $w(t)$ — скорость и ускорение шара, μ и ρ — коэффициент вязкости и плотность жидкости, $\nu = \frac{\mu}{\rho}$ — кинематический коэффициент вязкости, a — радиус шара. Первое слагаемое в этой формуле служит для учёта присоединённой массы жидкости.

Из формулы Буссинеска следует, что при $t=0$ и $v(0) \neq 0$ сила сопротивления становится бесконечной: нельзя шару, погружённому в вязкую жидкость, мгновенно сообщить конечную скорость. Поэтому следует принять $v(0) = 0$.

При вертикальном падении шара уравнение движения его будет:

$$\frac{4}{3} \pi \rho_1 a^3 w(t) = k(t) + \frac{4}{3} \pi (\rho_1 - \rho) a^3 g,$$

где ρ_1 — плотность материала шара, а второе слагаемое в правой части представляет силу веса с поправкой на архимедову силу.

Проектируя на направление движения, получим интегро-дифференциальное уравнение:

$$\dot{v}(t) + \alpha^2 v(t) + \frac{2\beta}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \frac{\dot{v}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} = f_0,$$

где введены обозначения

$$\alpha^2 = \frac{9\mu}{2a^2 \left(\rho_1 + \frac{\rho}{2} \right)}, \quad 2\beta = \frac{9\sqrt{\mu\rho}}{2a \left(\rho_1 + \frac{\rho}{2} \right)}, \quad f_0 = \frac{g(\rho_1 - \rho)}{\rho_1 + \frac{\rho}{2}}.$$

¹ С. W. Oseen, Neuere Methoden und Ergebnisse in der Hydrodynamik. Leipzig, 1927, стр. 134. Вывод формулы Буссинеска приведён в первом издании этой книги (стр. 209 — 216).

Поскольку $v(0) = 0$, изображающее уравнение будет

$$V(p) (p + 2\beta \sqrt{p} + \alpha^2) = f_0,$$

и задача сводится к разысканию начальной функции для изображения:

$$\begin{aligned} V(p) &= \frac{f_0}{p + 2\beta \sqrt{p} + \alpha^2} = \frac{f_0}{q^2 + 2\beta q + \alpha^2} = \\ &= \frac{f_0}{\alpha^2} + \frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \left[\frac{1}{q_1} \cdot \frac{q}{q - q_1} - \frac{1}{q_2} \cdot \frac{q}{q - q_2} \right], \end{aligned}$$

где q_1 и q_2 — корни знаменателя.

По § 32 имеем:

$$\begin{aligned} \frac{q}{q - q_s} &= \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - q_s} \rightarrow e^{q_s^2 t} \left(1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{-q_s \sqrt{t}} e^{-u^2} du \right) = \\ &= e^{q_s^2 t} \vartheta(-q_s \sqrt{t}). \quad (7.15) \end{aligned}$$

При $\beta > \alpha$, т. е. $\rho > 1,6\rho_1$, оба корня q_1 и q_2 вещественны и отрицательны, и функция $\vartheta(-q_s \sqrt{t})$ вычисляется по таблицам интеграла вероятности; при $\rho < 1,6\rho_1$ корни будут комплексными сопряжёнными; для вычисления можно пользоваться рядом, приведённым в 5° § 30, а при больших t — асимптотическим представлением (6.66),¹

Соответствующая начальная функция будет:

$$\begin{aligned} v(t) &= \frac{f_0}{\alpha^2} + \frac{f_0}{2\sqrt{\beta^2 - \alpha^2}} \left[\frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} - \beta} e^{q_1^2 t} \vartheta(-q_1 \sqrt{t}) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{\sqrt{\beta^2 - \alpha^2} + \beta} e^{q_2^2 t} \vartheta(-q_2 \sqrt{t}) \right]. \quad (7.16) \end{aligned}$$

¹ Практически эти ряды мало пригодны для получения надёжных числовых результатов. Более удобные способы вычисления интеграла (15) при комплексном аргументе даны в работе А. М. Каца, Вынужденные колебания при прохождении через резонанс. Инженерный сборник, III, № 2, 1947, стр. 100.

Для определения скорости шара при весьма больших значениях t воспользуемся асимптотическим представлением (6.66). Сохранив только первое слагаемое в нём, получим:

$$v(t) \sim \frac{f_0}{a^2} + \frac{f_0}{a^4} \cdot \frac{2\beta}{\sqrt{\pi t}} + \dots = \\ = \frac{2a^2 g}{9\nu} \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right) \left(1 + \frac{a}{\sqrt{\pi \nu t}} \right) + \dots, \quad (7.17)$$

где невыписанные члены имеют порядок $t^{-\frac{3}{2}}$.

6°. Более сложна задача о малых маятниковых колебаниях шара в вязкой жидкости. Уравнение движения имеет вид:

$$\frac{4}{3} \pi \rho_1 a^3 \ddot{x}(t) = - \frac{2}{3} \pi \rho a^3 \ddot{x}(t) - 6\pi \mu a \dot{x}(t) - \\ - \frac{6\pi \mu a^2}{\sqrt{\pi \nu}} \int_0^t \frac{\ddot{x}(\tau) d\tau}{\sqrt{t-\tau}} - \frac{4}{3} \pi a^3 (\rho_1 - \rho) \frac{g}{l} x,$$

где последнее слагаемое представляет слагающую силы веса (с учётом архимедовой силы) по направлению движения, l — длина нити маятника.

Обозначая $X(p) \rightarrow x(t)$ и имея в виду, что $x(0) = x_0$, $\dot{x}(0) = 0$, найдём изображающее уравнение:

$$X(p) (p^2 + a^2 p + 2\beta p^{\frac{3}{2}} + k^2) = x_0 (p^2 + a^2 p + 2\beta p^{\frac{3}{2}}), \quad (7.18)$$

где обозначено

$$k^2 = \frac{g(\rho_1 - \rho)}{l \left(\rho_1 + \frac{\rho}{2} \right)}.$$

Вводим в рассмотрение полином

$$\Delta(q) = q^4 + 2\beta q^3 + a^2 q^2 + k^2 \quad (q^2 = p).$$

Этот полином не имеет ни положительных, ни чисто мнимых корней; условия Раута — Гурвица не могут быть удовлетворены, так как отсутствует слагаемое с первой

степенью переменного q . Поэтому возможны только два случая: во-первых, случай двух вещественных отрицательных корней и пары комплексных сопряжённых корней с положительной вещественной частью, во-вторых, случай двух пар комплексных сопряжённых корней, причём одна пара имеет положительные, а другая — отрицательные вещественные части.

Возвращаясь к (18), имеем:

$$X(p) = x_0 - \frac{x_0 k^2}{\Delta(q)} = x_0 - x_0 k^2 \left[\frac{1}{\Delta(0)} + \sum_{s=1}^4 \frac{1}{q_s \Delta'(q_s)} \cdot \frac{q}{q - q_s} \right] = -x_0 k^2 \sum_{s=1}^4 \frac{1}{q_s \Delta'(q_s)} \cdot \frac{\sqrt{p}}{\sqrt{p} - q_s},$$

где q_s — корни полинома $\Delta(q)$.

По (15) теперь получим:

$$x(t) = -x_0 k^2 \sum_{s=1}^4 \frac{1}{q_s \Delta'(q_s)} e^{q_s^2 t} \vartheta(-q_s \sqrt{t}). \quad (7.19)$$

Фактическое получение числовых результатов сопряжено с затруднениями, указанными в предыдущем пункте.

При весьма больших значениях t , удерживая в асимптотическом представлении (6.66) лишь два слагаемых, получим:

$$x(t) \sim \frac{x_0 k^2}{\sqrt{\pi t}} \left[\sum_{s=1}^4 \frac{1}{q_s^2 \Delta'(q_s)} - \frac{1}{2t} \sum_{s=1}^4 \frac{1}{q_s^4 \Delta'(q_s)} \right]. \quad (7.20)$$

Полученные суммы могут быть выражены через коэффициенты полинома $\Delta(q)$.

Для этого разложим в ряды по степеням q обе части тождества:

$$\frac{1}{\Delta(q)} = \frac{1}{\Delta(0)} + \sum_{s=1}^n \frac{1}{q_s \Delta'(q_s)} \cdot \frac{q}{q - q_s}. \quad (7.21)$$

Имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\Delta(q)} &= \frac{1}{\Delta(0) + \Delta'(0)q + \frac{1}{2!}\Delta''(0)q^2 + \frac{1}{3!}\Delta'''(0)q^3 + \dots} = \\ &= \frac{1}{\Delta(0)} \left\{ 1 - \left[\frac{\Delta'(0)}{\Delta(0)}q + \frac{\Delta''(0)}{2\Delta(0)}q^2 + \frac{\Delta'''(0)}{6\Delta(0)}q^3 \right] + \left[\frac{\{\Delta'(0)\}^2}{\{\Delta(0)\}^2}q^2 + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{\Delta'(0)\Delta''(0)}{\{\Delta(0)\}^2}q^3 + \dots \right] - \left[\frac{\{\Delta'(0)\}^3}{\{\Delta(0)\}^3}q^3 + \dots \right] + \dots \right\}. \end{aligned}$$

С другой стороны,

$$\frac{q}{q - q_s} = - \frac{\frac{q}{q_s}}{1 - \frac{q}{q_s}} = - \frac{q}{q_s} \left(1 + \frac{q}{q_s} + \frac{q^2}{q_s^2} + \dots \right).$$

Сравнивая теперь коэффициенты при одинаковых степенях q справа и слева в тождестве (21), получим:

$$\left. \begin{aligned} \sum_{s=1}^n \frac{1}{q_s^2 \Delta'(q_s)} &= \frac{\Delta'(0)}{[\Delta(0)]^2}, \\ \sum_{s=1}^n \frac{1}{q_s^3 \Delta'(q_s)} &= \frac{\Delta''(0)}{2[\Delta(0)]^2} - \frac{[\Delta'(0)]^2}{[\Delta(0)]^3}, \\ \sum_{s=1}^n \frac{1}{q_s^4 \Delta'(q_s)} &= \frac{\Delta'''(0)}{6[\Delta(0)]^2} - \frac{\Delta'(0)\Delta''(0)}{[\Delta(0)]^3} + \frac{[\Delta'(0)]^3}{[\Delta(0)]^4} \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

и т. д.

Возвращаясь к интересующему нас асимптотическому выражению (20), имеем:

$$\Delta'(0) = 0, \quad \sum_{s=1}^4 \frac{1}{q_s^2 \Delta'(q_s)} = 0, \quad \sum_{s=1}^4 \frac{1}{q_s^4 \Delta'(q_s)} = \frac{\Delta'''(0)}{6[\Delta(0)]^2} = \frac{2\beta}{k^4}$$

и, следовательно,

$$x(t) \sim - \frac{\beta x_0}{k^2 t \sqrt{\pi t}} + \dots = - \frac{9l \sqrt{\gamma} x_0}{4ag \left(\frac{\rho_1}{\rho} - 1 \right) t \sqrt{\pi t}} + \dots$$

7°. Выше были приведены примеры построения решений интегро-дифференциальных уравнений с переменным верхним пределом при заданных начальных условиях.

В качестве примера краевой задачи приведём рассмотренную Н. Е. Жуковским задачу о прочности велосипедного колеса;¹ этот вопрос имеет более широкое техническое значение, чем указывается в его наименовании, так как речь идет об общей задаче изгиба стержня с круговой осью, покоящегося на сплошном упругом основании.

Колесо представляет кольцо с круговой осью радиуса a , подверженное действию радиально направленной силы Q (реакция земли) и реакций спиц. Число последних столь велико, что можно их реакции считать распределённой нагрузкой, интенсивность которой пропорциональна изменению длины спиц; но последнее равно радиальному перемещению $u(\varphi)$ точки колеса в месте присоединения спицы к ободу; поэтому дело сводится к задаче о плоской деформации кругового кольца, имеющего упругое основание, реакция которого $f_\omega(\varphi)$ определяется соотношением:

$$f_\omega(\varphi) = -cu(\varphi), \quad (7.23)$$

причём коэффициент пропорциональности c можно определить формулой

$$c = \frac{N\omega E_1}{2\pi al},$$

где N —число спиц, $l \approx a$ —длина спицы, ω —площадь её поперечного сечения, E_1 —модуль упругости материала.

Угол φ будем отсчитывать от точки приложения силы Q . В формулах § 20 будем иметь:

$$f_{1\omega} = Q,$$

$$f_{kz} = 0,$$

$$f_\omega(\varphi) = -cu(\varphi),$$

¹ Н. Е. Жуковский. Собр. соч., т. VII. ОНТИ, 1937, стр. 57—68.

и по (3.205), (3.209) и (3.210) получим:

$$\left. \begin{aligned} l_y^0 + av_z^0 &= \frac{a^2 c}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) d\xi - \frac{aQ}{2\pi}, \\ v_x^0 &= \frac{ac}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \xi \cos \xi d\xi, \\ v_z^0 &= -\frac{ac}{2\pi} \int_0^{2\pi} u(\xi) \xi \sin \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (7.24)$$

Заметим, что вследствие симметрии

$$u(\xi) = u(2\pi - \xi)$$

и, значит,

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} u(\xi) \xi \cos \xi d\xi &= \int_0^{\pi} u(\xi) \cos \xi d\xi + \int_0^{\pi} u(\xi_1) (2\pi - \xi_1) \cos \xi_1 d\xi_1 = \\ &= 2\pi \int_0^{\pi} u(\xi) \cos \xi d\xi. \end{aligned}$$

Но по первому уравнению равновесия (3.196)

$$-ac \int_0^{2\pi} u(\xi) \cos \xi d\xi + Q = 0,$$

откуда

$$v_x^0 = \frac{1}{2} Q,$$

что, впрочем, следует также из соображений симметрии. Соотношения (24) принимают вид:

$$\left. \begin{aligned} l_y^0 + av_z^0 &= \frac{a^2 c}{\pi} \int_0^{\pi} u(\xi) d\xi - \frac{aQ}{2\pi}, \quad v_x^0 = \frac{1}{2} Q, \\ v_z^0 &= -\frac{ac}{\pi} \int_0^{\pi} u(\xi) \xi \sin \xi d\xi. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

По (3.211) теперь составим выражение для радиального смещения, причём отбросим перемещение колеса как твёрдого тела, т. е. примем постоянные u_0 , w_0 , β_0 равными нулю. Получим:

$$\begin{aligned}
 u(\varphi) = & \frac{a^4 c}{2EI} \left\{ (1 - \cos \varphi) \cdot \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(\xi) d\xi + \right. \\
 & + \varphi \sin \varphi \cdot \frac{1}{\pi} \int_0^\pi u(\xi) \xi \sin \xi d\xi + \\
 & + \frac{Q}{2ac} \left[\sin \varphi - \varphi \cos \varphi - \frac{2}{\pi} (1 - \cos \varphi) \right] - \\
 & \left. - \int_0^\varphi u(\xi) [\sin(\varphi - \xi) - (\varphi - \xi) \cos(\varphi - \xi)] d\xi \right\}. \quad (7.26)
 \end{aligned}$$

Пришли к интегральному уравнению вида (1) с переменным верхним пределом и с ядром $k(\varphi - \xi)$, где

$$k(\varphi) = \sin \varphi - \varphi \cos \varphi \leftarrow \frac{2p}{(p^2 + 1)^2} = K(p). \quad (7.27)$$

Для краткости введём обозначения

$$\left. \begin{aligned} \frac{a^4 c}{EI} &= \lambda^2, \\ \frac{2}{\pi} \int_0^\pi u(\varphi) d\varphi &= A, \quad \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u(\varphi) \varphi \sin \varphi d\varphi = B. \end{aligned} \right\} \quad (7.28)$$

Постоянные A и B будут определены после того, как будет найдено выражение искомой функции $u(\varphi)$.

Изображающее уравнение для (27) имеет вид:

$$\begin{aligned}
 U(p) = & \frac{1}{2} \lambda^2 \left\{ \frac{A}{p^2 + 1} + \frac{2Bp^2}{(p^2 + 1)^2} + \right. \\
 & \left. + \frac{Q}{ac} \left[\frac{p}{(p^2 + 1)^2} - \frac{1}{\pi} \frac{1}{p^2 + 1} \right] - \frac{2}{(p^2 + 1)^2} U(p) \right\},
 \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$U(p) = \frac{1}{2} \lambda^2 \left\{ A \frac{p^2 + 1}{(p^2 + 1)^2 + \lambda^2} + 2B \frac{p^2}{(p^2 + 1)^2 + \lambda^2} + \right. \\ \left. + \frac{Q}{ac} \left[\frac{p}{(p^2 + 1)^2 + \lambda^2} - \frac{1}{\pi} \frac{p^2 + 1}{(p^2 + 1)^2 + \lambda^2} \right] \right\}. \quad (7.29)$$

Нужно найти теперь начальную функцию для этого изображения. Корни знаменателя

$$\Delta(p) = (p^2 + 1)^2 + \lambda^2 = p^4 + 2p^2 + 1 + \lambda^2$$

удобно представить в следующем виде. Полагаем

$$\lambda = \operatorname{tg} \psi, \quad 1 + \lambda^2 = \frac{1}{\cos^2 \psi} \quad \left(0 < \psi < \frac{\pi}{2} \right).$$

Тогда

$$p_1 = \frac{1}{\sqrt{\cos \psi}} e^{i \frac{\psi + \pi}{2}}, \quad p_2 = \frac{1}{\sqrt{\cos \psi}} e^{-i \frac{\psi + \pi}{2}}, \quad p_3 = -p_1, \quad p_4 = -p_2,$$

и выражение всех четырёх корней дается формулой

$$p_k = \pm \alpha \pm i\beta,$$

где обозначено

$$\alpha = \frac{1}{\sqrt{\cos \psi}} \sin \frac{\psi}{2}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{\cos \psi}} \cos \frac{\psi}{2}.$$

Постоянные α и β связаны соотношениями:

$$\alpha^2 + \beta^2 = \frac{1}{\cos \psi}, \quad 2\alpha\beta = \operatorname{tg} \psi = \lambda, \quad \beta^2 - \alpha^2 = 1. \quad (7.30)$$

Теперь можно написать:

$$\Delta(p) = p^4 + 2p^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2 = (p^2 - 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2) \times \\ \times (p^2 + 2\alpha p + \alpha^2 + \beta^2) = [(p - \alpha)^2 + \beta^2] [(p + \alpha)^2 + \beta^2].$$

Получаем:

$$\frac{p}{\Delta(p)} = \frac{1}{4\alpha(\alpha^2 + \beta^2)} \left[\frac{p^2 + 2\alpha p}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{p^2 - 2\alpha p}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \right] \div \rightarrow \\ \div \rightarrow \frac{1}{2\alpha\beta(\alpha^2 + \beta^2)} (\alpha \operatorname{ch} \alpha\psi \sin \beta\psi - \beta \operatorname{sh} \alpha\psi \cos \beta\psi) = \\ = \frac{\cos \psi \sqrt{\cos \psi}}{\sin \psi} \left(\sin \frac{\psi}{2} \operatorname{ch} \alpha\psi \sin \beta\psi - \cos \frac{\psi}{2} \operatorname{sh} \alpha\psi \cos \beta\psi \right), \\ \frac{p^2}{\Delta(p)} = \frac{1}{4\alpha} \left[\frac{p}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} - \frac{p}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \right] \div \rightarrow \frac{1}{2\alpha\beta} \operatorname{sh} \alpha\psi \sin \beta\psi = \\ = \operatorname{ctg} \psi \operatorname{sh} \alpha\psi \sin \beta\psi$$

и, наконец,

$$\begin{aligned} \frac{p^2 + 1}{\Delta(p)} &= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \left\{ 1 - \frac{p^4 + [2 - (\alpha^2 + \beta^2)^2] p^2}{p^4 + 2p^2 + (\alpha^2 + \beta^2)^2} \right\} = \\ &= \frac{1}{(\alpha^2 + \beta^2)^2} \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{p^2 + p \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2}{2\alpha}}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + \right. \right. \\ &\quad \left. \left. + \frac{p^2 - p \frac{(\alpha^2 + \beta^2)^2 + \alpha^2 + \beta^2 - 2}{2\alpha}}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \right] \right\} = \\ &= \cos^2 \psi \left\{ 1 - \frac{1}{2} \left[\frac{p(p + \alpha) + p\beta \operatorname{tg} \psi}{(p + \alpha)^2 + \beta^2} + \frac{p(p - \alpha) - p\beta \operatorname{tg} \psi}{(p - \alpha)^2 + \beta^2} \right] \right\} \rightarrow \\ &\rightarrow \cos^2 \psi (1 - \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \operatorname{tg} \psi \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi). \end{aligned}$$

Теперь можно осуществить переход от изображения (29) к начальной функции; найдём

$$\begin{aligned} u(\varphi) &= \frac{1}{2} \left(A - \frac{Q}{\pi ac} \right) \sin^2 \psi (1 - \operatorname{ch} \alpha \varphi \cos \beta \varphi - \operatorname{tg} \psi \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi) + \\ &\quad + B \operatorname{tg} \psi \operatorname{sh} \alpha \varphi \sin \beta \varphi + \\ &\quad + \frac{Q}{2ac} \sin \psi (\alpha \operatorname{ch} \alpha \varphi \sin \beta \varphi - \beta \operatorname{sh} \alpha \varphi \cos \beta \varphi). \quad (7.31) \end{aligned}$$

Остаётся определить постоянные A и B ; для этого нужно подставить в (28) только что найденное выражение (31) для $u(\varphi)$; выполнив интегрирование, получим два уравнения, определяющие эти постоянные. Вычисление вполне элементарно, но громоздко. Мы не будем его приводить.

Ясно, что, располагая решениями § 20, легко распространить предложенный здесь способ на другие задачи о плоской и неплоской деформации кругового кольца на упругом основании, реакция которого пропорциональна перемещению точек осевой линии кольца.

§ 34. Поперечные колебания стержней

1°. Дифференциальное уравнение изгиба стержня при отсутствии продольной силы и распределённых внешних моментов можно получить, исключая изгибающий момент m из (3.129) и (3.130); в случае стержня постоянного поперечного

сечения это уравнение будет

$$EI v^{IV}(x) = q(x).$$

Уравнение поперечных колебаний получим, заменяя $v(x)$ на $v(x, t)$ и включая силы инерции в число внешних нагрузок; это сводится к замене интенсивности нагрузки $q(x)$ на $-\rho \ddot{v}(x, t) + q(x, t)$, где ρ — масса единицы длины стержня. Получаем:

$$EI v^{IV}(x, t) + \rho \ddot{v}(x, t) = q(x, t),$$

или

$$v^{IV}(x, t) + m^4 \ddot{v}(x, t) = \frac{q(x, t)}{EI}, \quad (7.32)$$

где обозначено:

$$m^4 = \frac{\rho}{EI}. \quad (7.33)$$

2°. Как первый пример рассмотрим задачу о поперечных колебаниях двухопорной балки (длины $2l$) под действием мгновенно прикладываемой в её середине силы Q в дальнейшем остающейся постоянной.

Взяв начало координат в середине балки, ограничимся вследствие симметрии рассмотрением половины балки ($0 \leq x \leq l$).

Речь идёт, таким образом, об интегрировании уравнения

$$v^{IV}(x, t) + m^4 \ddot{v}(x, t) = 0$$

при начальных условиях

$$v(x, 0) = 0, \quad \dot{v}(x, 0) = 0 \quad (7.34)$$

и краевых условиях

$$\begin{aligned} v(l, t) = 0, \quad v''(l, t) = 0, \quad v'(0, t) = 0, \\ v'''(0, t) = \frac{Q}{2EI} \sigma_0(t). \end{aligned} \quad (7.35)$$

Изображающая система уравнений будет:

$$\frac{d^4 V(x, p)}{dx^4} + m^4 p^2 V(x, p) = 0, \quad (7.36)$$

$$V(l, p) = 0, \quad V''(l, p) = 0, \quad V'(0, p) = 0, \\ V'''(0, p) = \frac{Q}{2EI}. \quad (7.37)$$

Заметим, что такие же уравнения и краевые условия для прогиба (истинного, а не изображения его) мы получили бы, как это следует из (3.135), решая задачу об изгибе (сосредоточенной силой Q при тех же условиях закрепления краёв) балки, лежащей на сплошном упругом основании с коэффициентом оседания $k = m^4 p^2$. Изображающие уравнения динамической задачи о колебаниях стержня, таким образом, эквивалентны уравнениям статической задачи об изгибе этого стержня при наличии упругого основания.¹ Возвращаясь к нашей фиктивной задаче о балке на упругом основании, применим к её решению также операционный метод, теперь по переменной x . Полагаем:

$$V(x, p) \Leftarrow \psi(r) = r \int_0^{\infty} e^{-rx} V(x, p) dx,$$

причём $\psi(r)$, конечно, зависит параметрически от p . Получаем:

$$r^4 \left[\psi(r) - V(0, p) - \frac{1}{r} V'(0, p) - \frac{1}{r^2} V''(0, p) - \right. \\ \left. - \frac{1}{r^3} V'''(0, p) \right] + m^4 p^2 \psi(r) = 0,$$

¹ Сведение динамической задачи к фиктивной статической используется в динамике сооружений. См. Я. Г. Пановко, К построению общего решения задачи о вынужденных колебаниях системы с несколькими степенями свободы. Прикл. матем. и механ., т. V, № 1, 1941, стр. 103.

Можно обобщить сказанное на уравнения движения теории упругости в перемещениях, рассматривая их изображения как уравнения статики упругого тела с добавочными объёмными упругими силами. На этом пути Н. А. Кильчевский получил ряд существенно новых результатов в теории удара упругих тел. См. его книгу „Теория соударения твёрдых тел“ (Гостехиздат, 1949), в частности §§ 5 и 6 гл. III и гл. IV.

откуда, воспользовавшись (37), найдём:

$$\psi(r) = \frac{V(0, p) r^4}{m^4 p^2 + r^4} + \frac{V''(0, p) r^2}{m^4 p^2 + r^4} + \frac{Q}{2EI} \frac{r}{m^4 p^2 + r^4}.$$

Обозначив $m^4 p^2 = 4\alpha^4$, по (1.53) и таблице производных функций А. Н. Крылова, приведённой в § 3, получим:

$$\left. \begin{aligned} V(x, p) &= V(0, p) Y_1(\alpha x) + \\ &+ \frac{1}{\alpha^2} V''(0, p) Y_3(\alpha x) + \frac{Q}{2EI\alpha^3} Y_4(\alpha x), \\ V''(x, p) &= -V(0, p) 4\alpha^2 Y_3(\alpha x) + \\ &+ V''(0, p) Y_1(\alpha x) + \frac{Q}{2EI\alpha} Y_2(\alpha x). \end{aligned} \right\} \quad (7.38)$$

Нужно теперь определить $V(0, p)$ и $V''(0, p)$, для чего используются условия (37) на правой опоре балки ($x=l$). Найдём:

$$\left. \begin{aligned} V(0, p) &= \frac{Ql^3}{EI} \frac{\operatorname{sh} s - \sin s}{s^3 (\operatorname{ch} s + \cos s)}, \\ V''(0, p) &= -\frac{Ql}{2EI} \frac{\operatorname{sh} s + \sin s}{s (\operatorname{ch} s + \cos s)}, \end{aligned} \right\} \quad (7.39)$$

где обозначено

$$2\alpha l = s = ml \sqrt{2p}. \quad (7.40)$$

Нужно подставить эти выражения в (38), а затем ещё решить задачу перехода к начальной функции $v(x, t)$. Но если требуется найти прогиб и изгибающий момент только в месте приложения силы, т. е. в сечении $x=0$, а эти величины представляют наибольший интерес, то достаточно найти начальные функции для изображений (39). Возможность непосредственного получения интересующих нас значений решения в определённом месте (в данном случае при $x=0$), не сопровождающаяся необходимостью решать задачу в целом (для любого x), даёт очевидную значительную экономию труда и представляет одно из существенных достоинств операционного метода.

Построение начальных функций для изображений (39) осуществим, применяя вторую теорему разложения. Пред-

ставим для этого $V(0, p)$ в виде частного двух целых функций:

$$V(0, p) = \frac{Ql^3}{EI} \frac{F_1(s)}{F_2(s)},$$

$$F_1(s) = \frac{\operatorname{sh} s - \sin s}{s^3}, \quad F_2(s) = \operatorname{ch} s + \cos s.$$

Нужно найти корни знаменателя; для этого представим его в форме:

$$F_2(s) = 2 \cos \frac{(1+i)s}{2} \cos \frac{(1-i)s}{2},$$

из которой ясно видно, что искомые корни будут:

$$s_k = \pm \frac{2k+1}{2} \pi (1 \pm i) \quad (k=0, 1, 2, \dots).$$

Далее имеем:

$$F_1(0) = \frac{1}{3}, \quad F_2(0) = 2, \quad \frac{F_1(s_k)}{F_2'(s_k)} = \frac{1}{s_k^3},$$

и искомое разложение будет:

$$\begin{aligned} V(0, p) &= \frac{Ql^3}{6EI} \left[1 + 6 \sum_{k=0}^{\infty} \frac{s}{s_k^4 (s - s_k)} \right] = \frac{Ql^3}{6EI} + \\ &+ \frac{Ql^3}{EI} \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s}{\left(\frac{2k+1}{2} \pi \right)^4} \left\{ \frac{1}{(1+i)^4} \left[\frac{1}{s - \frac{2k+1}{2} \pi (1+i)} + \right. \right. \\ &+ \left. \frac{1}{s + \frac{2k+1}{2} \pi (1+i)} \right] + \frac{1}{(1-i)^4} \left[\frac{1}{s - \frac{2k+1}{2} \pi (1-i)} + \right. \\ &+ \left. \left. \frac{1}{s + \frac{2k+1}{2} \pi (1-i)} \right] \right\} = \frac{Ql^3}{6EI} \left\{ 1 + \frac{96}{\pi^4} \times \right. \\ &\times \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \left[\frac{1}{(1+i)^4} \frac{s^2}{s^2 - \left\{ \frac{2k+1}{2} \pi (1+i) \right\}^2} + \right. \\ &\left. \left. + \frac{1}{(1-i)^4} \frac{s^2}{s^2 + \left\{ \frac{2k+1}{2} \pi (1-i) \right\}^2} \right] \right\}. \end{aligned}$$

Заменяя s^2 его значением (40) и замечая, что $(1 \pm i)^4 = -4$, получим далее:

$$V(0, p) = \frac{Q(2l)^3}{49EI} \left[1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{(2k+1)^4} \frac{p^2}{p^2 + \left(\frac{2k+1}{2ml} \pi \right)^4} \right].$$

Первое слагаемое представляет смещение f_{st} при статическом действии силы Q . Окончательно находим:

$$v(0, t) = f_{st} \left[1 - \frac{96}{\pi^4} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k t}{(2k+1)^4} \right], \quad (7.41)$$

где λ_k — частоты свободных колебаний опёртого по краям стержня, определяемые, как мы видим, формулой:

$$\lambda_k = \frac{(2k+1)^2}{4m^2 l^2} \pi^2 \quad (k = 0, 1, 2, \dots).$$

Аналогично находится начальная функция для изображения изгибающего момента $M(0, p) = -EIV''(0, p)$ в середине балки. Получим:

$$m(0, t) = m_{st} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\cos \lambda_k t}{(2k+1)^2} \right]. \quad (7.42)$$

Заметим, что при рассмотрении задач о продольных колебаниях стержня и о колебаниях струны (§ 25) мы имели всегда два способа построения начальной функции по её изображению; первый заключался в применении второй теоремы разложения, он приводил к решению в форме бесконечного ряда; второй был основан на применении теоремы запаздывания и давал решение в замкнутой форме для отдельных промежутков времени. Это соответствовало приходу в рассматриваемую точку возмущения от его источника за конечный промежуток времени от момента приложения возмущения и последовательному прохождению через неё возмущений, отражённых от краев стержня (струны). В только что рассмотренной задаче о поперечных колебаниях стержня применение второй теоремы разложения представляет единственный способ получения начальной функции и причиной этого является то, что дифференциальное урав-

нение (32), коим определяются эти колебания, не допускает волновых решений;¹ оказывается (это будет видно из разбираемых ниже примеров), что решения этих уравнений соответствуют мгновенному распространению возмущения по всей длине стержня.

3°. Изгибающий момент M , в дальнейшем остающийся постоянным, внезапно прикладывается в точке бесконечно длинной балки. Найдём изменение во времени и по длине балки прогиба и изгибающего момента.

Точку приложения момента примем за начало координат; достаточно рассмотреть половину балки ($x \geq 0$); нужно найти обращающееся вместе со своими производными по x в нуль при $x \rightarrow \infty$ решение дифференциального уравнения (32) при $q(x, t) = 0$, при начальных условиях:

$$v(x, 0) = 0, \quad \dot{v}(x, 0) = 0$$

и при краевых условиях на левом конце:

$$v(0, t) = 0, \quad v''(0, t) = -\frac{M}{2EI} \sigma_0(t).$$

Решение изображающего уравнения (36), удовлетворяющее условиям

$$V(0, p) = 0, \quad V''(0, p) = -\frac{M}{2EI}$$

и при $x \rightarrow \infty$ обращающееся вместе со своими производными в нуль, будет:

$$V(x, p) = \frac{M}{2EI m^3 p} e^{-mx} \sqrt{\frac{p}{2}} \sin mx \sqrt{\frac{p}{2}}, \quad (7.43)$$

¹ Дифференциальное уравнение поперечных колебаний стержня, составленное с учётом влияния на прогиб перерезывающей силы и инерции вращения элементов стержня, допускает волновые решения с двумя скоростями распространения волн. См. Я. С. У ф л я н д, Распространение волн при поперечных колебаниях стержней и пластин. Прикл. матем. и механ., XII, № 3, 1948, стр. 287. При достаточно большом значении времени t , протекшего от момента приложения возмущения, эти „строгие“ волновые решения переходят в неволновые, полученные из обычно применяемого классического уравнения (32), за которым остаётся, конечно, преимущество простоты.

причём рассматривается ветвь функции $\sqrt{p}$, имеющая положительную вещественную часть. Из (43) далее получаем:

$$\begin{aligned} M(x, p) &= -EIV''(x, p) = \\ &= \frac{1}{2} Me^{-mx} \sqrt{\frac{p}{2}} \cos mx \sqrt{\frac{p}{2}}. \end{aligned} \quad (7.44)$$

Вводим обозначение

$$mx \sqrt{\frac{p}{2}} = \sqrt{r},$$

что соответствует переходу к новому независимому переменному

$$\tau = \frac{2t}{m^2 x^2}.$$

Тогда:

$$\left. \begin{aligned} V(x, p) &= \frac{Mx^2}{4EIr} e^{-\sqrt{r}} \sin \sqrt{r}, \\ M(x, p) &= \frac{1}{2} Me^{-\sqrt{r}} \cos \sqrt{r}. \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

По (6.45) имеем:

$$\begin{aligned} e^{-\sqrt{r}} \cos \sqrt{r} &\rightarrow 1 - C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right), \\ e^{-\sqrt{r}} \sin \sqrt{r} &\rightarrow C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right), \end{aligned}$$

откуда следует, что

$$\begin{aligned} \frac{1}{r} e^{-\sqrt{r}} \sin \sqrt{r} &\rightarrow \int_0^{\tau} \left[C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}\right) - S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}\right) \right] d\xi = \\ &= \int_0^{\tau} d\xi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}} \left(\cos \frac{\pi u^2}{2} - \sin \frac{\pi u^2}{2} \right) du. \end{aligned}$$

Область интегрирования в плоскости u, ξ ограничена кривой $u = \frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}$ и прямой $\xi = \tau$. При перемене порядка

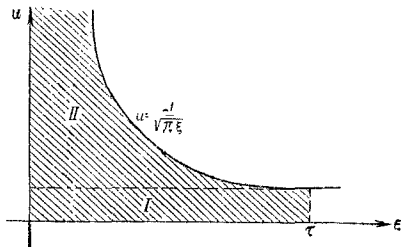


Рис. 62. Перемена порядка интегрирования в интеграле

$$\int_0^{\tau} d\xi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}} \cos \frac{\pi u^2}{2} du.$$

интегрирования эта область разбивается на две области I и II, показанные на рис. 62. Получаем:

$$\begin{aligned} \int_0^{\tau} d\xi \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}} \cos \frac{\pi u^2}{2} du &= \int_0^{\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}} \cos \frac{\pi u^2}{2} du \int_0^{\tau} d\xi + \\ &+ \int_{\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}}^{\infty} \cos \frac{\pi u^2}{2} du \int_0^{\frac{1}{\pi u^2}} d\xi = \tau C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right) + \frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}}^{\infty} \frac{\cos \frac{\pi u^2}{2}}{u^2} du. \end{aligned}$$

Интегрированием по частям находим далее:

$$\frac{1}{\pi} \int_{\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}}^{\infty} \frac{1}{u^2} \cos \frac{\pi u^2}{2} du = \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \cos \frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2} + S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right).$$

Итак,

$$\int_0^{\tau} C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}\right) d\xi = \tau C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right) + \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \cos \frac{1}{2\tau} - \frac{1}{2} + S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right)$$

и аналогичное вычисление даёт

$$\int_0^{\tau} S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\xi}}\right) d\xi = \tau S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right) + \sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \sin \frac{1}{2\tau} + \frac{1}{2} - C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right).$$

Возвращаясь к (45), теперь находим:

$$m(x, t) = \frac{M}{2} \left[1 - C\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) - S\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) \right], \quad (7.46)$$

$$\begin{aligned} v(x, t) = \frac{Mx^2}{4EI} \left\{ \frac{2t}{m^2x^2} \left[C\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) - S\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) \right] + \right. \\ \left. + \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \frac{1}{mx} \left(\cos \frac{m^2x^2}{4t} - \sin \frac{m^2x^2}{4t} \right) + \right. \\ \left. + S\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) + C\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) - 1 \right\}. \quad (7.47) \end{aligned}$$

При $t \rightarrow 0$ и $x \neq 0$ аргумент интегралов Френеля стремится к бесконечности и поскольку

$$C(\infty) = S(\infty) = \frac{1}{2},$$

получаем

$$m(x, 0) = 0, \quad v(x, 0) = 0.$$

Но при t , отличном от нуля, хотя бы и сколь угодно малом, и при $x \neq 0$ и сколь угодно большом $m(x, t)$ и $v(x, t)$ будут отличны от нуля, хотя и сколь угодно малы. Это значит, что возмущение, приложенное в некоторой точке стержня, мгновенно распространяется по его длине. Заметим ещё, что полученные здесь решения при достаточно большом t совпадают с решениями волновых уравнений поперечных колебаний (см. подстрочное примечание на стр. 409), но существенно отличаются от них при малых t .

4°. Аналогично трактуется задача о колебаниях бесконечной балки под действием мгновенно прикладываемой в некоторой ее точке ($x=0$) силы Q , которая в дальнейшем остаётся неизменной. Краевые условия при $x=0$ будут:

$$v'(0, t) = 0, \quad v'''(0, t) = \frac{Q}{2EI} \sigma_0(t).$$

Получаем:

$$v(x, t) \leftarrow V(x, p) = \\ = \frac{Qx^3}{8EI} \frac{1}{r\sqrt{r}} e^{-1\sqrt{r}} (\cos \sqrt{r} + \sin \sqrt{r}). \quad (7.48)$$

По (6.43) и (6.44) имеем:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{r}} \cos \sqrt{r} &\rightarrow \int_0^{\tau} \cos \frac{1}{2\xi} \cdot \frac{d\xi}{\sqrt{\pi\xi}} = \\ &= -1 + 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \cos \frac{1}{2\tau} + 2S\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right); \\ \frac{1}{\sqrt{r}} e^{-\sqrt{r}} \sin \sqrt{r} &\rightarrow \int_0^{\tau} \sin \frac{1}{2\xi} \frac{d\xi}{\sqrt{\pi\xi}} = \\ &= 1 + 2\sqrt{\frac{\tau}{\pi}} \sin \frac{1}{2\tau} - 2C\left(\frac{1}{\sqrt{\pi\tau}}\right) \end{aligned}$$

и повторное интегрирование, проводимое, как указано в предшествующем пункте, даёт начальные функции для изображений $\frac{1}{r\sqrt{r}} e^{-\sqrt{r}} \cos \sqrt{r}$, $\frac{1}{r\sqrt{r}} e^{-\sqrt{r}} \sin \sqrt{r}$.

Прделав это вычисление, получим:

$$\begin{aligned} v(x, t) = \frac{Qx^3}{12EI} \left\{ 1 + \frac{4\sqrt{2t}\sqrt{t}}{\sqrt{\pi}m^3x^3} \left(\cos \frac{m^2x^2}{4t} + \sin \frac{m^2x^2}{4t} \right) + \right. \\ \left. + \frac{1}{mx} \sqrt{\frac{2t}{\pi}} \left(\sin \frac{m^2x^2}{4t} - \cos \frac{m^2x^2}{4t} \right) - C\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) - \right. \\ \left. - S\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) + \frac{6t}{m^2x^2} \left[S\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) - C\left(\frac{mx}{\sqrt{2\pi t}}\right) \right] \right\}. \quad (7.49) \end{aligned}$$

В точке приложения силы прогиб будет

$$v(0, t) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Qt\sqrt{t}}{3m^3EI}. \quad (7.50)$$

Конечно, этот результат можно получить, не делая указанного выше сложного вычисления прогиба для любого x .

Нужно принять $x = 0$ непосредственно в изображении (48); найдём:

$$V(0, p) = \frac{Q}{2 \sqrt{2m^3 EI}} \cdot \frac{1}{p \sqrt{p}},$$

откуда непосредственно получается (50) по (6.30).

5°. Рассмотрим теперь задачу о поперечном ударе груза о балку; считая балку бесконечно длинной, предположим, что груз Q падает на балку со скоростью c в точке, которую примем за начало координат; вследствие симметрии можно ограничиться рассмотрением половины балки ($x \geq 0$).

Нужно рассмотреть дифференциальное уравнение поперечных колебаний балки

$$v^{IV}(x, t) + m^4 \ddot{v}(x, t) = 0$$

при краевых условиях

$$v'(0, t) = 0, \quad \frac{Q}{2g} \ddot{v}(0, t) = -EI v'''(0, t).$$

Первое условие должно иметь место вследствие симметрии, второе представляет уравнение движения груза, на который действует реакция балки, равная и противоположно направленная перерезывающей силе в точке $x = 0$. Весом груза пренебрегаем.

Начальные условия задачи будут

$$v(x, 0) = 0, \quad \dot{v}(x, 0) = 0,$$

причём последнее условие имеет место при всех $x > 0$; вместе с тем мы примем, что падающее тело сообщает в момент падения свою скорость той точке балки, с которой оно вступает в соприкосновение. Поэтому

$$\dot{v}(0, 0) = c.$$

Решение изображающего уравнения (36), обращающееся в нуль при $x \rightarrow \infty$, имеет вид:

$$V(x, p) = e^{-mx} \sqrt{\frac{p}{2}} \left(A \cos mx \sqrt{\frac{p}{2}} + B \sin mx \sqrt{\frac{p}{2}} \right).$$

Определив постоянные A и B из условий:

$$V'(0, p) = 0, \quad \frac{Q}{2g} p^2 \left[V(0, p) - \frac{\dot{v}(0, 0)}{p} \right] = -EIV'''(0, p),$$

найдем

$$A = B = \frac{c}{p + \frac{4\rho g}{mQ} \sqrt{\frac{p}{2}}}$$

и, значит,

$$V(x, p) = \frac{c}{p + \frac{4\rho g}{mQ} \sqrt{\frac{p}{2}}} e^{-m\omega \sqrt{\frac{p}{2}}} \left(\cos mx \sqrt{\frac{p}{2}} + \right. \\ \left. + \sin mx \sqrt{\frac{p}{2}} \right).$$

Построение начальной функции для этого изображения сложно. Но, чтобы найти движение груза, достаточно построить начальную функцию для изображения:

$$V(0, p) = \frac{c}{p + \beta \sqrt{p}} \quad \left(\beta = \frac{2 \sqrt{2} \rho g}{mQ} \right),$$

чем мы и ограничимся. Имеем:

$$\frac{c}{p + \beta \sqrt{p}} = \frac{c}{p - \beta^2} - \frac{c\beta}{\sqrt{p}} \frac{1}{p - \beta^2}$$

и далее:

$$\frac{1}{p - \beta^2} = \frac{1}{\beta^2} \left(\frac{p}{p - \beta^2} - 1 \right) \rightarrow \frac{1}{\beta^2} (e^{\beta^2 t} - 1), \\ \frac{1}{\sqrt{p}} \frac{1}{p - \beta^2} \rightarrow \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^t \sqrt{\tau} e^{\beta^2(t-\tau)} d\tau = \\ = \frac{2}{\sqrt{\pi}} e^{\beta^2 t} \left[-\frac{\sqrt{t}}{\beta^2} e^{-\beta^2 t} + \frac{1}{\beta^3} \int_0^{\beta \sqrt{t}} e^{-u^2} du \right].$$

Находим

$$v(0, t) = \frac{c}{\beta^2} \left[-1 + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \beta \sqrt{t} + e^{\beta^2 t} \mathfrak{S}(\beta \sqrt{t}) \right], \quad (7.51)$$

где принято обозначение

$$\vartheta(\beta \sqrt{t}) = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\beta \sqrt{t}} e^{-u^2} du.$$

Дифференцированием по t находим скорость груза

$$\dot{v}(0, t) = ce^{\beta^2 t} \vartheta(\beta \sqrt{t})$$

и его реакцию на балку:

$$-\frac{Q}{g} \ddot{v}(0, t) = \frac{Qc\beta^2}{g} \left[\frac{1}{\beta \sqrt{\pi t}} - e^{-\beta^2 t} \vartheta(\beta \sqrt{t}) \right]. \quad (7.52)$$

6°. В двух предшествующих примерах прогиб оказался функцией, неограниченно возрастающей с течением времени. Это объясняется тем, что балка считалась имеющей бесконечную длину. Рассмотрим теперь бесконечную балку, лежащую на сплошном упругом основании; результаты исследования в этом случае не будут иметь указанного недостатка.

Дифференциальное уравнение поперечных колебаний получим, полагая в (32)

$$q(x, t) = -kv(x, t).$$

Изображающее уравнение при нулевых начальных условиях будет:

$$V^{IV}(x, p) + (\alpha^4 + m^4 p^2)V(x, p) = 0,$$

где $\alpha^4 = \frac{k}{EI}$. Его решение, обращающееся в нуль при $x \rightarrow \infty$, будет:

$$V(x, p) = e^{-\beta x} (A \cos \beta x + B \sin \beta x), \quad (7.53)$$

где обозначено

$$\beta = \frac{1}{\sqrt{2}} \sqrt{\alpha^4 + m^4 p^2}. \quad (7.54)$$

Рассмотрим случай мгновенного приложения к бесконечной балке силы Q , которая в дальнейшем остаётся постоянной.

Постоянные A и B нужно определить из условий:

$$V'(0, p) = 0, \quad V'''(0, p) = \frac{Q}{2EI}.$$

При $x > 0$ получим:

$$V(x, p) = \frac{Q}{8EI} \frac{e^{-\beta x}}{\beta^3} (\cos \beta x + \sin \beta x). \quad (7.55)$$

Построение начальной функции при любом x весьма сложно. Ограничимся рассмотрением движения точки приложения силы:

$$\begin{aligned} V(0, p) &= \frac{Q}{2\sqrt{2EI}} (\alpha^4 + p^2 m^4)^{-\frac{3}{4}} = \\ &= \frac{Q}{2\sqrt{2EI}\alpha^3} \left(1 + \frac{1}{s^2}\right)^{-\frac{3}{4}} \frac{1}{s\sqrt{s}}, \end{aligned}$$

где введено обозначение

$$s = \frac{m^2}{\alpha^2} p = \sqrt{\frac{\rho}{k}} p,$$

что соответствует переходу к безразмерному времени

$$t \sqrt{\frac{k}{\rho}} = \tau.$$

Можно получить представление начальной функции в форме ряда, сходящегося при всех значениях t , разлагая изображение $V(0, p)$ в ряд по степеням $\frac{1}{s}$. Имеем

$$\begin{aligned} V(0, p) &= \frac{Q}{2EI\alpha^3} \frac{1}{s\sqrt{s}} \left(1 - \frac{3}{4} \cdot \frac{1}{s^2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{3 \cdot 7}{2! 4^2} \cdot \frac{1}{s^4} - \frac{3 \cdot 7 \cdot 11}{3! 4^3} \frac{1}{s^6} + \dots\right). \end{aligned}$$

По (6.30) получим:

$$\begin{aligned} v(0, t) &= \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{Q\tau\sqrt{\tau}}{EI\alpha^3} \left[\frac{1}{3} - \right. \\ &\quad \left. - \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{\tau^{2n}}{1 \cdot 5 \cdot 9 \dots (4n-3)(4n+1)(4n+3) \cdot n!} \right]. \end{aligned}$$

Формула (50) даёт, как следовало ожидать, первое слабое этого ряда.

Чтобы найти движение при большом t , воспользуемся методом асимптотического представления начальной функции, изложенным в § 31. Имеем:

$$v(0, t) = \frac{Q}{2\sqrt{2}EI\alpha^3} F(s).$$

Нужно найти разложения функции

$$\frac{F(s)}{s} = \frac{1}{s} \frac{1}{(1+s^2)^{3/4}}$$

в области её особенностей: простого полюса $s=0$ и точек разветвления $s=\pm i$. Составляем разложение в ряд по степеням $(s-i)$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{s(1+s^2)^{3/4}} &= \frac{1}{i} \frac{1}{(2i)^{3/4}} \frac{1}{1+\frac{s-i}{i}} \frac{1}{(s-i)^{3/4}} \frac{1}{\left(1+\frac{s-i}{2i}\right)^{3/4}} = \\ &= \frac{e^{-\frac{7}{8}\pi i}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \frac{1}{(s-i)^{3/4}} \left[1 - \frac{s-i}{i} + \left(\frac{s-i}{i}\right)^2 - \dots\right] \times \\ &\times \left[1 - \frac{3}{4} \frac{s-i}{2i} + \frac{3 \cdot 7}{2!4^2} \left(\frac{s-i}{2i}\right)^2 + \dots\right] = \\ &= \frac{e^{-\frac{7}{8}\pi i}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \left[\frac{1}{(s-i)^{3/4}} - \frac{11}{8i} (s-i)^{1/4} + \dots \right], \end{aligned}$$

и по (6.58) соответствующее разложение будет:

$$H_i(t) = \frac{e^{-\frac{7}{8}\pi i}}{\sqrt{2}\sqrt{2}} \left[\frac{\tau^{-1/4}}{\Gamma\left(\frac{3}{4}\right)} - \frac{11}{8i} \frac{\tau^{-5/4}}{\Gamma\left(-\frac{1}{4}\right)} + \dots \right].$$

Замечая ещё, что вычет функции $\frac{F(s)}{s}$ в полюсе $s=0$ равен единице, получаем:

$$v(0, t) \sim \frac{Q}{2\sqrt{2}EI\alpha^3} [1 + e^{it}H_i(t) + e^{-it}H_{-i}(t)].$$

Имея в виду, что $\Gamma\left(\frac{3}{4}\right) = 1,226$, найдём:

$$v(0, t) \sim 0,3536 \frac{Q}{EI\alpha^3} \left[1 - 0,970 \frac{\cos\left(\tau + \frac{\pi}{8}\right)}{\sqrt[4]{\tau}} + \dots \right],$$

где отброшенные члены имеют порядок $\tau^{-5/4}$. Первое слагаемое $0,3536 \frac{Q}{\alpha^3 EI}$ даёт прогиб при статическом действии силы.

7°. Рассмотрим ещё в условиях предыдущей задачи случай действия периодической силы $P \cos \omega t$. Как выше, получим:

$$v(0, t) \leftarrow V(0, p) = \frac{P}{2 \sqrt{2} EI \alpha^3} \frac{p^2}{p^2 + \omega^2} \left(1 + \frac{m^4 p^2}{\alpha^4} \right)^{-\frac{3}{4}}.$$

Чтобы найти чисто вынужденные колебания, т. е. колебания, имеющие частоту ω возмущающей силы, достаточно удержать в асимптотическом представлении начальной функции разложения $H_{\pm \omega i}(t)$, относящиеся к полюсам $\pm \omega i$ функции $\frac{1}{p} V(0, p)$. Вычеты в этих полюсах будут:

$$\begin{aligned} \frac{P}{4 \sqrt{2} EI \alpha^3} \left(1 - \frac{m^4 \omega^2}{\alpha^4} \right)^{-\frac{3}{4}} & \quad \text{при } \frac{m^2 \omega}{\alpha^2} < 1 \\ \frac{P}{4 \sqrt{2} EI \alpha^3} \left(\frac{m^4 \omega^2}{\alpha^4} - 1 \right)^{-\frac{3}{4}} e^{\pm \frac{3\pi i}{4}} & \quad \text{„ } \frac{m^2 \omega}{\alpha^2} > 1. \end{aligned}$$

В первом случае находим:

$$v(0, t) \sim \frac{P}{2 \sqrt{2} EI \alpha^3} \left(1 - \frac{m^4 \omega^2}{\alpha^4} \right) \cos \omega t,$$

во втором:

$$v(0, t) \sim - \frac{P}{2 \sqrt{2} EI \alpha^3} \left(\frac{m^4 \omega^2}{\alpha^4} - 1 \right) \cos \left(\omega t + \frac{\pi}{4} \right).$$

§ 35. Поперечные колебания неограниченной круглой плиты

1°. Дифференциальное уравнение поперечных колебаний тонкой плиты имеет вид:

$$N \Delta \Delta w(x, y, t) = q(x, y, t) - \rho \ddot{w}(x, y, t). \quad (7.56)$$

Оно может быть получено из (3.139), если в число внешних нагрузок включить силу инерции $-\rho \ddot{w}(x, y, t)$, отнесённую

к единице площади средней поверхности плиты. В частности, при разыскании форм колебаний круглой плиты, имеющих симметрию вращения, это уравнение приводится к виду:

$$\left(\frac{\partial}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}\right) \left[\frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w(r, t)}{\partial r} \right] + \\ + \frac{\rho}{N} \frac{\partial^2 w(r, t)}{\partial t^2} = q(r, t). \quad (7.57)$$

Изображающее уравнение будет:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left[\frac{d^2 W(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW(r, p)}{dr} \right] + \\ + \frac{\rho}{N} p^2 [W(r, p) - w(r, 0) - \dot{w}(r, 0)] = Q(r, p), \quad (7.58)$$

где $w(r, 0)$ и $\dot{w}(r, 0)$ определяют распределение прогибов и скоростей точек плиты в начальный момент времени.

В дальнейшем рассматриваются задачи о колебаниях первоначально покоившейся плиты, вызываемых приложением силы, сосредоточенной в её центре. Тогда

$$Q(r, p) = 0, \quad w(r, 0) = 0, \quad \dot{w}(r, 0) = 0, \quad (7.59)$$

и уравнение (58) принимает форму уравнения равновесия плиты на упругом основании:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left(\frac{d^2 W}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW}{dr} \right) + \mu^2 p^2 W(r, p) = 0, \quad (7.60)$$

где $\mu^2 = \frac{\rho}{N}$.

Общее решение этого уравнения может быть выражено через функции Бесселя и Макдональда $I_0(r\sqrt{\mu p i})$ и $K_0(r\sqrt{\mu p i})$ и сопряжённые им величины. Пользуясь известными обозначениями, полагаем:¹

$$I_0(r\sqrt{\mu p i}) = \text{ber}(r\sqrt{\mu p}) + i \text{bei}(r\sqrt{\mu p}), \\ K_0(r\sqrt{\mu p i}) = \text{ker}(r\sqrt{\mu p}) + i \text{kei}(r\sqrt{\mu p}).$$

¹ Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, стр. 48.

Общее решение уравнения (60) будет:

$$W(r, p) = C_1 \operatorname{ber}(r \sqrt{\mu p}) + C_2 \operatorname{bei}(r \sqrt{\mu p}) + \\ + C_3 \operatorname{ker}(r \sqrt{\mu p}) + C_4 \operatorname{kei}(r \sqrt{\mu p}). \quad (7.61)$$

Постоянные должны быть определены из краевых условий.

2°. Рассмотрим простейшую задачу о колебаниях неограниченной плиты под действием сосредоточенной силы $Qf(t)$. В общем интеграле (61) следует удержать лишь слагаемые, обращающиеся в нуль при $r \rightarrow \infty$. Поэтому надо принять $C_1 = C_2 = 0$. Далее, при весьма малых z :

$$\operatorname{ker} z = -\ln \frac{z}{2} + \dots, \\ \operatorname{kei} z = -\left(\frac{z}{2}\right)^2 \ln \frac{z}{2} - \frac{\pi}{4} + \dots, \quad (7.62)$$

где невыписанные члены обращаются в нуль при $z = 0$. Поскольку прогиб плиты в точке приложения силы должен оставаться конечным, нужно принять $C_3 = 0$. Остающаяся постоянная C_4 определяется из условия равенства силы $Qf(t)$ и равнодействующей перерезывающих сил, вычисленной для окружности бесконечно малого радиуса с центром в точке приложения силы. В области изображений, т. е. для плиты на фиктивном упругом основании, это требование выражается условием:

$$\left\{ 2\pi r \frac{d}{dr} \left[\frac{d^2 W(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW(r, p)}{dr} \right] \right\}_{r \rightarrow 0} = \frac{1}{N} QF(p).$$

Подставляя сюда:

$$W(r, p) = C_4 \operatorname{kei}(r \sqrt{\mu p}) = -\frac{1}{4} C_4 \mu p r^2 \ln r + \dots,$$

найдем C_4 и далее $W(r, p)$:

$$W(r, p) = -\frac{Q}{2\pi N \mu} \cdot \frac{F(p)}{p} \operatorname{kei}(r \sqrt{\mu p}). \quad (7.63)$$

Задача сводится, таким образом, к разысканию начальной функции для изображения

$$\operatorname{kei}(r \sqrt{\mu p}) = \operatorname{kei}(2 \sqrt{s}),$$

где $s = \frac{1}{4} r^2 \mu p$. Переход к этой переменной соответствует введению в начальную функцию безразмерной величины

$$x = \frac{4t}{r^2 \mu}. \quad (7.64)$$

Предположим теперь, что найдена начальная функция

$$- \operatorname{kei} (2 \sqrt{s}) \rightarrow \psi(x). \quad (7.65)$$

Тогда по теореме свёртывания и (63) найдём искомое решение в форме:

$$w(r, t) = \frac{Qr^2}{8\pi N} \int_0^\infty \psi(\xi) f\left[\frac{\nu r^2}{4}(x - \xi)\right] d\xi. \quad (7.66)$$

3°. Для построения начальной функции $\psi(x)$ будем исходить из представления функции Макдональда $K_0(2\sqrt{s})$ в форме определённого интеграла:¹

$$K_0(2\sqrt{s}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-(\tau + \frac{s}{\tau})} \frac{d\tau}{\tau}.$$

Вводя новую переменную интегрирования $x = \frac{1}{\tau}$, получим:

$$K_0(2\sqrt{s}) = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{-sx} e^{-\frac{1}{x}} \frac{dx}{x}.$$

Отсюда по определению преобразования Лапласа следует, что

$$sK_0(2\sqrt{s}) \rightarrow \frac{1}{2x} e^{-\frac{1}{x}}$$

и, значит,

$$K_0(2\sqrt{s}) \rightarrow \frac{1}{2} \int_0^\infty \frac{e^{-\frac{1}{x}}}{x} dx = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{\infty}}^{\frac{1}{0}} e^{-u} \frac{du}{u},$$

¹ Р. О. Кузьмин, Бесселевы функции, стр. 95.

или по свойству III табл. 1:

$$K_0(2\sqrt{s\alpha}) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\frac{\alpha}{x}}^{\infty} e^{-u} \frac{du}{u} = \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} e^{-\alpha u} \frac{du}{u}.$$

Полагая теперь $\alpha = i$, найдём:

$$K_0(2\sqrt{si}) = \ker(2\sqrt{s}) + i \operatorname{kei}(2\sqrt{s}) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{e^{-iu}}{u} du.$$

Отделяя вещественную и мнимую части, получим таким образом:

$$\ker(2\sqrt{s}) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = -\frac{1}{2} \operatorname{ci}\left(\frac{1}{x}\right), \quad (7.67)$$

$$-\operatorname{kei}(2\sqrt{s}) \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \frac{1}{2} \operatorname{si}\left(\frac{1}{x}\right). \quad (7.68)$$

По (66) теперь находим:

$$w(r, t) = \frac{Qr^2}{16\pi N} \int_0^x \operatorname{si}\left(\frac{1}{\xi}\right) f\left[\frac{\mu r^2}{4}(x - \xi)\right] d\xi. \quad (7.69)$$

4°. Рассмотрим частный случай силы, мгновенно прикладываемой, а потом остающейся постоянной; тогда $f(t) = \sigma_0(t)$ и по (69):

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \frac{Qr^2}{16\pi N} \int_0^x \operatorname{si}\left(\frac{1}{\xi}\right) d\xi = \frac{Qr^2}{16\pi N} \int_0^x d\xi \int_{\frac{1}{\xi}}^{\infty} \sin u \frac{du}{u} = \\ &= \frac{Qr^2}{16\pi N} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \int_{\frac{1}{u}}^x d\xi = \frac{Qr^2}{16\pi N} \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \left(x - \frac{1}{u}\right) \sin u \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

причём при перемещении порядка интегрирования применён способ, указанный для аналогичного случая в § 34.

Замечая далее, что

$$\int_{\frac{1}{w}}^{\infty} \sin u \frac{du}{u^2} = -x \sin \frac{1}{x} - \int_{\frac{1}{w}}^{\infty} \frac{\cos u}{u} du = -x \sin \frac{1}{x} + \text{ci} \left(\frac{1}{x} \right),$$

находим

$$w(r, t) = \frac{Qr^2}{16\pi N} \left[x \text{si} \left(\frac{1}{x} \right) - x \sin \frac{1}{x} + \text{ci} \left(\frac{1}{x} \right) \right].$$

Возвращаясь теперь к прежним обозначениям, получим:

$$w(r, t) = \frac{Qt}{4\pi N\mu} \left[\text{si} \left(\frac{r^2\mu}{4t} \right) - \sin \frac{r^2\mu}{4t} + \frac{r^2\mu}{4t} \text{ci} \left(\frac{r^2\mu}{4t} \right) \right]. \quad (7.70)$$

Нетрудно проверить, что полученное решение удовлетворяет начальным условиям. С другой стороны, при $u \rightarrow 0$ функция $\text{ci} u$ имеет особенность вида $\ln |u|$. Поэтому при любом конечном t и при $r \rightarrow 0$:

$$w(r, t) = \frac{Qr^2}{8\pi N} \ln r + w_1(r, t),$$

причём

$$\left[r \frac{\partial}{\partial r} \left(\frac{\partial^2 w_1}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial w_1}{\partial r} \right) \right]_{r \rightarrow 0} = 0.$$

Используя далее асимптотические представления

$$\text{si} x \sim \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \dots \right) + \frac{\sin x}{x} \left(\frac{1}{x} - \frac{3!}{x^3} + \dots \right),$$

$$\text{ci} x \sim \sin x \left(1 - \frac{2!}{x^2} + \dots \right) - \frac{\cos x}{x} \left(1 - \frac{3!}{x^3} + \dots \right),$$

легко убедиться, что при любом конечном t и $r \rightarrow \infty$ прогиб $w \rightarrow 0$.

Таким образом, полученное решение удовлетворяет краевым условиям и условиям на бесконечности; удовлетворены также и начальные условия. Вместе с тем нетрудно убедиться, что при любом конечном $r \geq 0$ и $t \rightarrow \infty$ прогиб w возрастает неограниченно. Кроме того, при любом $r > 0$ значение $w(r, t)$ получается конечным, каково бы ни было t . Это значит, что

возмущение из центра $r = 0$ передаётся по пластине мгновенно. Выше уже было отмечено,¹ что этот недостаток элементарной теории поперечных колебаний устраняется при учёте влияния перерезывающей силы и инерции вращения.

5°. Рассмотрим теперь ту же задачу, что и выше, но для плиты, положенной на сплошное упругое основание. В уравнении (56) нужно принять

$$q(x, y, t) = -k w(x, y, t),$$

где k — коэффициент оседания основания. В случае симметрии вращения общий интеграл изображающего уравнения:

$$\left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr}\right) \left[\frac{d^2 W(r, p)}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dW(r, p)}{dr} \right] + \\ + (\mu^2 p^2 + m^2) W(r, p) = 0, \quad (7.71)$$

где $m^2 = \frac{k}{N}$, выражается формулой (61) с той лишь разницей, что аргументом стоящих в ней функций, вместо $r \sqrt{\mu p}$, теперь будет $r \sqrt{m^2 + \mu^2 p^2}$.

Поэтому, вместо (63) получим:

$$W(r, p) = -\frac{Q}{2\pi N} \frac{F(p)}{\sqrt{m^2 + \mu^2 p^2}} \operatorname{kei} [r(m^2 + \mu^2 p^2)^{1/4}]. \quad (7.72)$$

Рассмотрим сначала движение точки приложения силы ($r = 0$). Вспоминая, что $\operatorname{kei} 0 = -\frac{\pi}{4}$, найдём:

$$W(0, p) = \frac{Q}{8Nm} \cdot \frac{F(p)}{\sqrt{1 + \frac{\mu^2 p^2}{m^2}}}.$$

Замечая, что

$$\frac{p \frac{\mu}{m}}{\sqrt{1 + p^2 \frac{\mu^2}{m^2}}} \rightarrow J_0\left(\frac{mt}{\mu}\right),$$

по теореме свёртывания получим

$$w(0, t) = \frac{Q}{8N\mu} \int_0^t J_0\left(\frac{m\tau}{\mu}\right) f(t - \tau) d\tau.$$

См. подстрочное примечание на стр. 409.

Пусть, в частности,

$$f(t) = \cos \omega t.$$

Тогда

$$\begin{aligned} w(0, t) = \frac{Q}{8N_{\mu}} \left[\cos \omega t \int_0^t J_0\left(\frac{m\tau}{\mu}\right) \cos \omega \tau d\tau + \right. \\ \left. + \sin \omega t \int_0^t J_0\left(\frac{m\tau}{\mu}\right) \sin \omega \tau d\tau \right]. \quad (7.73) \end{aligned}$$

Чтобы получить вынужденные колебания с частотой возмущающей силы при установившемся режиме, надо положить верхний предел в интегралах равным бесконечности. Приходим к интегралам Вебера:

$$\int_0^{\infty} J_0(a\tau) \cos \omega \tau d\tau, \quad \int_0^{\infty} J_0(a\tau) \sin \omega \tau d\tau.$$

Для вычисления этих интегралов вспомним, что

$$J_0(at) \leftarrow \frac{p}{\sqrt{p^2 + a^2}}, \quad \text{т. е.} \quad \int_0^{\infty} e^{-pt} J_0(at) dt = \frac{1}{\sqrt{p^2 + a^2}}.$$

Полагая в этом равенстве $p = \omega i$, найдём:

$$\int_0^{\infty} J_0(at) (\cos \omega t - i \sin \omega t) dt = \frac{1}{\sqrt{a^2 - \omega^2}}.$$

Поэтому при $a > \omega$:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(at) \cos \omega t dt &= \frac{1}{\sqrt{a^2 - \omega^2}}, \\ \int_0^{\infty} J_0(at) \sin \omega t dt &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.74)$$

При $a < \omega$ получаем:

$$\left. \begin{aligned} \int_0^{\infty} J_0(at) \cos \omega t \, dt &= 0, \\ \int_0^{\infty} J_0(at) \sin \omega t \, dt &= \frac{1}{\sqrt{\omega^2 - a^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.75)$$

Возвращаясь к (73), находим вынужденные колебания при установившемся режиме: при $m > \mu\omega$:

$$\omega(0, t) = \frac{Q}{8N} \frac{\cos \omega t}{\sqrt{m^2 - \mu^2 \omega^2}}, \quad (7.76)$$

а при $m < \mu\omega$:

$$\omega(0, t) = \frac{Q}{8N} \frac{\sin \omega t}{\sqrt{\mu^2 \omega^2 - m^2}}. \quad (7.77)$$

6°. Вернёмся к случаю любого r , т. е. к изображению (72). Перепишем его в форме:

$$\begin{aligned} W(r, p) = & - \frac{QF(p)}{2\pi\mu Np} \cdot \frac{\mu \frac{p}{m}}{1 + \left(\frac{\mu p}{m}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\mu p}{m}\right)^2} \times \\ & \times \operatorname{kei} \left[r \sqrt{m} \sqrt[4]{1 + \left(\frac{\mu p}{m}\right)^2} \right]. \end{aligned} \quad (7.78)$$

Временно введём обозначение $p_1 = \frac{\mu p}{m}$ и положим

$$A(p_1) = - \frac{p_1}{1 + p_1^2} \sqrt{1 + p_1^2} \operatorname{kei} (r \sqrt{m} \sqrt[4]{1 + p_1^2}).$$

Имея в виду воспользоваться преобразованием (6.90), положим:

$$F(\sqrt{1 + p_1^2}) = - \sqrt{1 + p_1^2} \operatorname{kei} (r \sqrt{m} \sqrt[4]{1 + p_1^2}),$$

т. е.

$$F(p_1) = - p_1 \operatorname{kei} (r \sqrt{m} p_1).$$

По (68) и (64):

$$- \operatorname{kei} r \sqrt{mp_1} \rightarrow \frac{1}{2} \int_{\frac{r^2 m}{4t_1}}^{\infty} \sin u \frac{du}{u} \quad \left(t_1 = \frac{mt}{\mu}\right),$$

и поскольку правая часть обращается в нуль при $t_1 = 0$:

$$- p_1 \operatorname{kei} r \sqrt{mp_1} \rightarrow \frac{d}{dt_1} \frac{1}{2} \int_{\frac{r^2 m}{4t_1}}^{\infty} \sin u \frac{du}{u} = \frac{1}{2t_1} \sin \frac{r^2 m}{4t_1}.$$

По (6.90) теперь находим

$$A(p_1) \rightarrow \int_0^{t_1} J_0(\sqrt{t_1^2 - \tau^2}) \frac{1}{2\tau_1} \sin \frac{r^2 m}{4\tau_1} d\tau_1,$$

или

$$\begin{aligned} A(p_1) \rightarrow a(t) &= \frac{1}{2} \int_0^t J_0\left(\frac{m}{\mu} \sqrt{t^2 - \tau^2}\right) \sin \frac{r^2 \mu}{4\tau} \cdot \frac{d\tau}{\tau} = \\ &= \frac{1}{2} \int_{\frac{r^2 \mu}{4t}}^{\infty} J_0\left[\frac{m}{\mu} \sqrt{t^2 - \left(\frac{r^2 \mu}{4u}\right)^2}\right] \frac{\sin u}{u} du. \end{aligned}$$

Возвращаясь к (78) и воспользовавшись теоремой свёртывания, получим:

$$\begin{aligned} w(r, t) &= \\ &= \frac{Q}{4\pi_{\mu} N} \int_0^t f(t - \tau) d\tau \int_{\frac{r^2 \mu}{4t}}^{\infty} J_0\left[\frac{m}{\mu} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r^2 \mu}{4u}\right)^2}\right] \frac{\sin u}{u} du, \end{aligned}$$

откуда, меняя порядок интегрирования, найдём:

$$\begin{aligned} w(r, t) = \\ = \frac{Q}{4\pi\mu N} \int_{\frac{r^2\mu}{4t}}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \int_{\frac{r^2\mu}{4u}}^t J_0 \left[\frac{m}{\mu} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r^2\mu}{4u} \right)^2} \right] f(t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (7.79)$$

7°. Рассмотрим, в частности, случай гармонической возмущающей силы $f(t) = \cos \omega t$. Тогда для установившегося режима получим:

$$\begin{aligned} w(r, t) = \\ = \frac{Q}{4\pi\mu N} \left\{ \cos \omega t \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \int_{\frac{r^2\mu}{4u}}^{\infty} J_0 \left[\frac{m}{\mu} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r^2\mu}{4u} \right)^2} \right] \cos \omega \tau d\tau \right. \\ \left. + \sin \omega t \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \int_{\frac{r^2\mu}{4u}}^{\infty} J_0 \left[\frac{m}{\mu} \sqrt{\tau^2 - \left(\frac{r^2\mu}{4u} \right)^2} \right] \sin \omega \tau d\tau \right\}. \end{aligned} \quad (7.80)$$

Для вычисления получившихся интегралов вспомним, что по (6.89):

$$\frac{e^{-\tau \sqrt{p^2 + 1}}}{\sqrt{p^2 + 1}} = \int_{\tau}^{\infty} e^{-pt} J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) dt.$$

Полагая здесь $p = i\omega_1$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{e^{-\tau \sqrt{1 - \omega_1^2}}}{\sqrt{1 - \omega_1^2}} = \\ = \int_{\tau}^{\infty} J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) (\cos \omega_1 t + i \sin \omega_1 t) dt, \end{aligned} \quad (7.81)$$

откуда следует, что при $\omega_1^2 < 1$:

$$\frac{e^{-\tau \sqrt{1-\omega_1^2}}}{\sqrt{1-\omega_1^2}} = \int_{\tau}^{\infty} J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) \cos \omega_1 t dt, \\ 0 = \int_{\tau}^{\infty} J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) \sin \omega_1 t dt. \quad (7.82)$$

Если же $\omega_1^2 > 1$, то из (81) найдем:

$$\left. \begin{aligned} \int_{\tau}^{\infty} J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) \cos \omega_1 t dt &= -\frac{\sin \sqrt{\omega_1^2 - 1} \tau}{\sqrt{\omega_1^2 - 1}}, \\ \int_{\tau}^{\infty} J_0(\sqrt{t^2 - \tau^2}) \sin \omega_1 t dt &= \frac{\cos \sqrt{\omega_1^2 - 1} \tau}{\sqrt{\omega_1^2 - 1}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.83)$$

Возвращаясь к (80) и полагая $\frac{m}{\mu} > \omega$, по (82) получим

$$w(r, t) = \frac{Q}{4\pi\mu N} \frac{\cos \omega t}{\sqrt{\frac{m^2}{\mu^2} - \omega^2}} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} e^{-\sqrt{\frac{m^2}{\mu^2} - \omega^2} \frac{r^2 \mu}{4u}} du. \quad (7.84)$$

Остаётся вычислить интеграл (84); воспользуемся для этого соотношением (68), которое запишем в виде:

$$\begin{aligned} \text{kel}(2\sqrt{s}) &= \frac{s}{2} \int_0^{\infty} e^{-sx} dx \int_{\frac{1}{x}}^{\infty} \frac{\sin u}{u} du = \\ &= \frac{s}{2} \int_0^{\infty} \frac{\sin u}{u} du \int_{\frac{1}{u}}^{\infty} e^{-sx} dx = \frac{1}{2} \int_0^{\infty} e^{-\frac{s}{u}} \sin u \frac{du}{u}. \end{aligned}$$

Заменяя букву s на $\frac{r^2\mu}{4} \sqrt{\left(\frac{m}{\mu}\right)^2 - \omega^2}$, получим теперь вместо (84):

$$w(r, t) = -\frac{Q}{2\pi N} \frac{\cos \omega t}{\sqrt{m^2 - \mu^2 \omega^2}} \operatorname{kei} \left[r \sqrt{m^2 - \mu^2 \omega^2} \right]. \quad (7.85)$$

При $r=0$ отсюда находим уже ранее указанный результат. Аналогично трактуется случай $m < \mu\omega$.

ЛИТЕРАТУРА ПО ОПЕРАЦИОННОМУ ИСЧИСЛЕНИЮ

1. А. М. Эфрос и А. М. Данилевский, Операционное исчисление и контурные интегралы. ДНТВУ, 1937.
2. М. И. Конторович, Операционное исчисление и нестационарные явления в электрических цепях. Гостехиздат, 1949.
3. Х. Карслоу и Д. Егер, Операционные методы в прикладной математике. Гос. из-во иностр. л-ры, 1948.
4. М. Ф. Гарднер и Дж. Л. Бэрнс. Переходные процессы в линейных системах. Гостехиздат, 1949.
5. Д. Р. Карсон, Электрические нестационарные явления и операционное исчисление. ДНТВУ, 1934.

Далее можно указать на главы, посвящённые операционному исчислению, в книгах:

6. Б. В. Булгаков, Колебания, ч. 1, гл. 2. Гостехиздат, 1949.
7. А. В. Лыков, Теплопроводность нестационарных процессов, гл. VIII. Гостехиздат, 1948.
8. К. А. Круг, Переходные процессы в линейных электрических цепях, гл. 1. Гостехиздат, 1948.
9. Т. Карман и М. Био, Математические методы в инженерном деле, гл. X. Гостехиздат, 1948.

Строгое изложение основ и аппарата операционного исчисления дано в работе:

10. В. А. Диткин, Операционное исчисление. Успехи математ. наук, т. II, вып. 6 (22).